









ÜBER
GAUSS' ZAHLENTHEORETISCHE ARBEITEN

VON

PAUL BACHMANN

Durchgesehener Abdruck aus Heft I der *Materialien für eine wissenschaftliche Biographie von Gauss* gesammelt von F. KLEIN und M. BRENDEL.
Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathem.-physik. Klasse. 1911.
Vorgelegt in der Sitzung vom 29. Juli 1911.

Einleitung.

Wer eine Darstellung alles dessen unternimmt, was die mathematischen Wissenschaften GAUSS verdanken, muss füglich seine zahlentheoretischen Arbeiten an erster Stelle in Betracht ziehen. Nicht so sehr aus dem Grunde, weil die Disquisitiones arithmeticae, sein grösstes und zwar nicht dem Erscheinen, aber der Entstehung nach erstes Werk, der Zahlentheorie gewidmet sind, als vielmehr deswegen, weil in der Tat in dem Kranze von GAUSS' epochemachenden wissenschaftlichen Leistungen seine Entdeckungen im Gebiete der Zahlentheorie die grossartigsten und in ihrer Wirkung auf die weitere Entwicklung der Mathematik die bedeutendsten gewesen sind; von jenem monumentalen Jugendwerke an datieren wir erst in strengerem Sinne die Wissenschaft der höheren Arithmetik.

Im Folgenden wollen wir versuchen, eine zwar möglichst knappe, aber doch das Wesentliche erschöpfende systematische Skizze dieser zahlentheoretischen GAUSSschen Ergebnisse zu zeichnen, indem wir zunächst von den hauptsächlichsten Teilen der D. A.*) eine Analyse geben, und dann zeigen, wie die hier begründeten Theorien in den späteren Arbeiten von GAUSS sich entwickelt und neue Früchte gezeitigt haben. Zugleich werden wir bemüht sein, dem Interesse an der Entstehungsgeschichte dieser Arbeiten oder einzelner Lehrsätze an der Hand der eigenen GAUSSschen Aufzeichnungen darüber, soweit möglich, Rechnung zu tragen.

---

*) Zur Abkürzung steht im Folgenden:
D. A. für *Disquisitiones arithmeticae*, A. R. für *Analysis Residuorum*, T. für *Tagebuch* von GAUSS, W. für GAUSS' Werke.

I. Die Disquisitiones arithmeticae.

a. Die Entstehung der D. A. Die Analysis Residuorum.

1.

Die D. A. erschienen im Sommer des Jahres 1801. In der Vorrede zu seinem Werke setzt GAUSS den Beginn seiner Beschäftigung mit dessen Gegenstande in den Anfang des Jahres 1795. Dies ist nun freilich nicht ganz genau zu nehmen. Schon vorher hat GAUSS sich viel mit rechnerischen Versuchen beschäftigt, die hauptsächlich auf die Teilbarkeit der ganzen Zahlen, insbesondere auf die Eigenschaften der Primzahlen, auf die Reste, welche die Potenzen anderer Zahlen durch solche geteilt lassen, u. dgl. m. gerichtet gewesen sind. GAUSS selbst erwähnt in einem an ENCKE gerichteten Briefe (W. II, S. 444), dass er bereits (im Jahre 1792 oder 1793) als 15jähriger, als er sich die LAMBERTschen Supplemente zu den Logarithmentafeln verschafft habe, mit einer der verzwicktesten Aufgaben der Zahlentheorie, der Frequenz der Primzahlen, rechnerisch sich beschäftigt habe. Bald hernach schon hat GAUSS diesem Briefe zufolge die Tafel solcher Frequenz, welche W. II, S. 435 abgedruckt ist, begonnen, während ihre vollständige Berechnung erst späterer Zeit angehört. Auch entstammt jener Zeit wohl schon die Tafel des quadratischen Charakters der Primzahlen (W. II, S. 399), jedenfalls aber die Tafel zur Verwandlung gemeiner Brüche in Dezimalbrüche (W. II, S. 411), die beide nur zum Teil den artt. 99 resp. 316 der D. A. angefügt sind. Von der letzteren sagt GAUSS a. a. O.: quam integram sive etiam ulterius continuatam occasione data publici juris faciemus. Sie besteht aus zwei Teilen, deren zweiter in der Handschrift des Nachlasses den Vermerk trägt: explicitus October 11. 1795. Ob nun dieser zweite Teil die geplante weitere Fortsetzung ausmache oder nicht, jedenfalls gehört diese Tabelle dem genannten Jahre an; im ersteren Falle aber dürfte man schliessen, dass der bezügliche Teil der D. A. schon vor jenem Tage verfasst sein müsse. Dieser Ansicht zu Hilfe käme eine andere Tabelle mit dem Titel: »I. Ausschliessung gewisser Zahlen beim Aufsuchen der Faktoren«, welche in einem Hefte des Nachlasses mit der Aufschrift »Neue Beiträge zu den mathematischen Tafeln besonders zur Erleichte-

rung der Zahlenrechnungen« und mit dem Datum März 1795 vorhanden ist. Sie bezieht sich auf die Methode der artt. 319—322 des sechsten Abschnitts der D. A., deren Inhalt hiernach, soweit er nicht die Theorie der quadratischen Formen voraussetzt, als von GAUSS schon im Jahre 1795 gefunden angenommen werden darf. Die »Hülfstafel bei Auflösung der unbestimmten Gleichung $A = fx^2 + gy^2$ vermittelst der Ausschliessungsmethode« (W. II, S. 509), bei welcher schon der sechste Abschnitt der D. A. erwähnt wird, auf den sie sich bezieht, gehört erst späterer Zeit an.

2.

Zahlentabellen, wie die zuvor genannten, dienten damals wie später GAUSS als numerisches Beobachtungsmaterial, um auf induktivem Wege arithmetische Gesetzmässigkeiten daraus zu erkennen, wie er denn in einem Briefe an den Hofrat ZIMMERMANN vom 12. März 1797*) sie als »vielleicht nützlich« bezeichnet, »in diesem Felde noch neue Erfindungen zu machen«. So geschah es denn auch, wie GAUSS in der Vorrede der D. A. erzählt, dass zufällig bei einer anderen Arbeit im Anfange d. J. 1795 ein ausgezeichneter arithmetischer Satz (er meint den Satz des art. 108 vom quadratischen Charakter von — 1) ihm aufstiess, der ihn nun reizte, seine tieferen Gründe und seinen Beweis aus denselben zu finden, und hieraus entsprangen dann schnell GAUSS' hierher gehörige theoretische Forschungen und Ergebnisse. Noch in demselben Jahre (1795) und zwar im Monat März (W. I, S. 476, Anm. zu art. 131) entdeckte GAUSS durch Induktion das berühmte theorema fundamentale von den quadratischen Resten. Im Herbst d. J. siedelte er nach Göttingen über und fand hier schon am 8. April 1796 (Nr. 2 T.) seinen ersten Beweis des Fundamentaltheorems. Ohne Zweifel hat GAUSS nun in Göttingen die bis dahin ihm fehlende Bekanntschaft (s. W. I, S. 6) mit den Arbeiten seiner Vorgänger EULER, LAGRANGE, LEGENDRE schnell sich verschafft, von der seine Zitate in den D. A. Zeugnis geben. Nach seiner Aussage in der Vorrede zu den D. A. aber hatte er den grössten Teil ihrer ersten vier Abschnitte vorher schon »absolviert«. Hiernach und auf Grund der Daten, welche GAUSS in seinem *Tagebuch* für die auf jene Abschnitte bezüglichen Entdeckungen angegeben hat und die fast sämtlich in

*) Dieser Brief ist abgedruckt W. X1, S. 19—21.

das Jahr 1796 fallen, wie der schon erwähnte Beweis des Fundamentaltheorems, mit dem er den Höhepunkt dieser Teile der D. A. erreichte, darf man annehmen, dass er den Inhalt der ersten vier Abschnitte schon 1796 besass. Ob er sie aber damals bereits niedergeschrieben hatte?

In seinem Nachlasse befindet sich ein Manuskript mit dem Titel *Analysis Residuorum*, das als eine frühere Niederschrift der letzten Abschnitte der D. A. zu betrachten ist. Sie besteht aus drei Kapiteln, dem 6., 7. und 8. Das letztere kann nicht vor dem September 1797 entstanden sein, da nach den Angaben des GAUSSschen *Tagebuchs* die Auffindung seiner Sätze oder Beweise zum grössten Teil über 1796 hinaus bis zum 9. September 1797 reicht. In art. 367 desselben (W. II, S. 235) aber heisst es von der kubischen Gleichung für die drei $\frac{\nu-1}{3}$-gliedrigen Perioden aus ν^{ten} Einheitswurzeln: quam in Cap. VI a priori determinandam docuimus. Diese Gleichung ist (Nr. 39 T.) am 1. Oktober 1796 auf induktivem Wege von GAUSS ermittelt, aber erst am 20. Juli 1797 (Nr. 67 T.) wirklich hergeleitet worden. Da nun das 6. Kapitel der A. R. genau mit einem unvollendeten Versuche, dies zu leisten, abbricht, jene Gleichung selbst noch nicht darin auftritt, darf man vermuten, dass dies Kapitel vor dem letztbezeichneten Datum verfasst sei. Was es sonst von der Kreisteilung enthält, geht nicht über das Jahr 1796 hinaus. Das 7. Kapitel ferner, das bei einer nicht auf den Text bezüglichen Randzeichnung das Datum »1796 Januar« trägt, enthält im Wesentlichen genau dasselbe, was den sechsten Abschnitt der D. A. bis zu der Stelle ausmacht, wo die Theorie der quadratischen Formen zur Anwendung kommt, und man möchte also nach dem, was über die darauf bezüglichen Tabellen gesagt ist, annehmen, dass es spätestens schon 1796 niedergeschrieben sei. Für das 6. Kapitel würde dann dasselbe gelten. Müsste man aber die Notiz Nr. 68 T. auf die in der Annotatio des art. 251 (W. II, S. 209) bemerkte Schwierigkeit beziehen, die dann erst am 21. Juli 1797 behoben worden wäre, so könnte das 6. Kapitel nicht vor diesem Tage verfasst sein. Dasselbe würde gelten, wenn man die Worte Error LAGRANGII, welche in der Handschrift dem 7. Kapitel vorangestellt sind, auf LAGRANGES von GAUSS (W. II, S. 249) getadelte Meinung beziehen müsste. Jedenfalls aber wird es richtig sein, wenn man die Niederschrift der A. R. auf 1796 bis 1797 datiert.

Die Niederschrift der vier ersten Abschnitte der D. A. wird vor jener und in der Hauptsache vor 1797 geschehen sein, doch kann die endgiltige Fassung der D. A. ihnen frühestens in diesem Jahre gegeben sein, da sich in Gauss' *Tagebuche* bis in letzteres hinein noch Angaben über gelungene Beweise für Sätze der vier ersten Abschnitte finden. In der Tat spricht Gauss in seinem Briefe an den Hofrat Zimmermann vom 12. März 1797*) von seinem Werke noch erst wie von einem Entwurfe, und seine Briefe an denselben vom 20. November und 24. Dezember 1797 zeigen, dass er erst in dieser Zeit beschäftigt ist, die ersten Bogen seines Werks für den Druck fertig zu stellen**). Der fünfte Abschnitt kann nicht wohl vor dem 22. Juni 1796 (nach Nr. 15 T.) begonnen sein, hatte aber im Sommer 1798 schon eine dritte Darstellung erhalten (Brief von Gauss an Bolyai vom 29. Nov. 1798***)). Seine vierte Bearbeitung stammt diesem Briefe und den Notizen in Gauss' *Tagebuch* zufolge bestimmt aus dem Winter 1798/9. Gauss schreibt u. a., dass es ihm bei jeder folgenden Bearbeitung geglückt sei, die Sache auf eine solche Art auszuführen, dass es seine bei der vorhergehenden gehegten kühnsten Hoffnungen überstieg, und er werde das in ein paar Tagen zum vierten Male vollendet haben, was er im ganzen vorigen Sommer zum dritten Male ausarbeitete. Diesmal war es offenbar die Theorie der ternären quadratischen Formen, welche solches Gelingen herbeiführte und deren Studium er in jenen Tagen begann (s. Nr. 95 und 96 T.). Die vierte Bearbeitung des fünften Abschnitts wird in der Hauptsache dessen endgiltige Fassung gewesen sein, wenngleich Gauss einen sehr wesentlichen Punkt der genannten Theorie erst im Februar 1800 erledigte (Nr. 103 T.). Es heisst weiter in dem erwähnten Briefe: »der sechste [Abschnitt] ist von keinem grossen Umfange; der siebente (der die Theorie der Polygone enthält) etwas grösser aber im Wesentlichen schon fertig und nur der letzte wird mich noch eine beträchtliche Zeit beschäftigen, da er die schwersten Materien enthält«. Dieser Teil ist bei Veröffentlichung der D. A.

*) Siehe W. X 1, S. 19.

**) Auszüge aus den beiden letzteren Briefen sind abgedruckt in der Schrift: *Karl Friedrich Gauss. Zwölf Kapitel aus seinem Leben* von L. Hänselmann. Leipzig 1878, S. 34—37. Die in dem Briefe vom 22. November (siehe a. a. O. S. 35) erwähnten Stellen accedere possunt S. 5 und eine andere S. 7 stehen W. I, S. 11 Zeile 9 v. u. resp. S. 13 Zeile 7—8.

***) *Briefwechsel zwischen C. F. Gauss und W. Bolyai,* herausgegeben von F. Schmidt und P. Stäckel. Leipzig 1899, S. 11.

wegen zu grossen Umfangs des Werkes — jedenfalls auch, weil GAUSS seinen Inhalt noch nicht ausgereift genug fand — unterdrückt worden.

Das Fragment, welches unter dem Titel Sectio octava in W. II, S. 510 veröffentlicht ist, wird als eine zur Fortsetzung der D. A. unternommene Neubearbeitung der A. R. anzusehen und erst nach Vollendung der D. A. zu setzen sein, da die Artikelnummern unmittelbar an die der D. A. sich anschliessen. Nachdem GAUSS auch diese einstweilen bei Seite gelegt, nahm er erst 1808 in dem andern Fragmente (W. II, S. 243) seine Absicht wieder auf, jedoch hat er deren Ausführung über seinen andern gleichzeitigen Untersuchungen auch bald wieder fallen lassen.

b. Inhalt der Abschnitte I—IV der D. A.

3.

Wenden wir uns nun zum Inhalte der D. A. selbst. Ihre vier ersten Abschnitte geben die Elemente der heutigen Zahlentheorie, genauer desjenigen Teils derselben, den man multiplikative Zahlentheorie nennt, weil er wesentlich auf die Darstellbarkeit der Zahlen als Produkten von einfachsten Faktoren, den Primzahlen, gegründet und auf die Teilung der Zahlen durch einander, die Eigenschaften der Reste, welche dabei verbleiben, u. dgl. mehr gerichtet ist. Hier fand GAUSS Vieles und Wichtiges von dem, was er selbständig erforscht hatte, schon von älteren Mathematikern, wie FERMAT, EULER, LAGRANGE und LEGENDRE, teils nur bemerkt, teils aber auch bewiesen. Er aber hat es Alles methodisch und in wissenschaftlichem Zusammenhange uns neu entwickelt und dargestellt.

Gleich die Einführung des Begriffes der Kongruenz, mit welcher der erste Abschnitt beginnt, eines Begriffs, der zwar auch sonst schon stillschweigend verwendet, aber bis dahin noch nicht formuliert und methodisch verwertet worden war, gilt eine Tat: zwei Zahlen a, b heissen einander kongruent nach einem Modul m, in Zeichen:

$$a \equiv b \pmod{m},$$

wenn sie gleichen Rest lassen bei der Teilung durch m. Und äusserst glücklich gewählt ist das Zeichen für solches Verhalten, weil es die weitgreifende Analogie, die sich alsbald zwischen Kongruenzen und Gleichungen herausstellt,

zur lichten Anschauung bringt. So steht der Forderung, eine algebraische Gleichung n^{ten} Grades

$$ax^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

aufzulösen, falls die Koeffizienten ganzzahlig gedacht werden, die Aufgabe zur Seite, die Wurzeln der Kongruenz

$$ax^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n \equiv 0 \pmod{m}$$

d. h. die inkongruenten ganzzahligen Werte von x zu finden, die ihr genügen. Der zweite Abschnitt gibt neben Fundamentalsätzen über Teilbarkeit der Zahlen die Lösung jener Aufgabe für die Kongruenzen ersten Grades, welche im Grunde mit der schon von EULER und LAGRANGE nach verschiedenen Methoden behandelten Auflösung der unbestimmten Gleichung

$$ax + by = c$$

übereinkommt. Während GAUSS die analoge Aufgabe für mehrere lineare Kongruenzen mit mehr als einer Unbekannten nur flüchtig behandelt, zieht er aus der Auffindung einer Zahl, welche nach mehreren gegebenen Moduln gegebene Reste lässt, eine neue Bestimmung des bereits von EULER*) ermittelten Ausdrucks der Funktion $\varphi(m)$, welche die Anzahl der zu m primen Zahlen, welche $\lesseqgtr m$, bezeichnet. Der Abschnitt schliesst mit dem nicht wesentlich von dem LAGRANGEschen**) verschiedenen Beweise der Tatsache, dass eine Kongruenz in Bezug auf einen Primzahlmodul nicht mehr Wurzeln haben kann, als ihr Grad beträgt.

Etwas unvermittelt schiebt sich im art. 42 jener fundamentale GAUSSsche Satz ein, dass, wenn eine ganze Funktion von x mit ganzzahligen Koeffizienten in ein Produkt zweier ganzer Funktionen mit rationalen Koeffizienten zerlegbar ist, diese Koeffizienten ebenfalls ganzzahlig sein müssen, ein Satz, welcher die Grundlage für die besonders von KRONECKER ausgebildete Arithmetik der ganzen Funktionen bildet und auch in andern Disziplinen, u. a. für einen der wichtigsten Sätze über Ideale eines algebraischen Zahlenkörpers, sich grundlegend gezeigt hat. In GAUSS' *Tagebuch* (Nr. 69) wird die Auffindung dieses Satzes

*) Novi Comm. Acad. Petrop. 8 (1760/61) 1763, S. 74, Opera Omnia, Ser. I, vol. 2, S. 531.

**) Mémoires de l'Acad. Berlin (1768) 1770 24, S. 192, Oeuvres II, S. 667.

verhältnismässig spät, erst auf den 23. Juli 1797 datiert; vermutlich den Studien zur Theorie der höheren Kongruenzen, welche der achte Abschnitt behandelt, entsprungen, ist er hier eingefügt.

4.

Der Fortgang von den Kongruenzen ersten zu denjenigen höheren Grades führt von selbst zur Theorie der Potenzreste d. i. zur Untersuchung der Reste, welche die Potenzen der verschiedenen Zahlen lassen, wenn sie durch einen gegebenen Modul geteilt werden, sowie der Bedingungen, unter denen eine gegebene Zahl ein solcher Rest einer Potenz von vorgeschriebenem Grade sein kann, u. a. mehr. Besonders interessiert hierbei der Fall, wo der Modul eine ungerade Primzahl p ist; GAUSS behandelt daher im dritten Abschnitte diesen vorzugsweise. Für jede durch p nicht teilbare Zahl a gibt es eine kleinste Potenz a^d, welche den Rest 1 lässt; dieser Exponent d, zu welchem »a (mod. p) gehört«, ist stets ein Teiler von $p-1$, und aus diesem Umstande folgt sogleich der berühmte, schon von FERMAT*) ausgesprochene Satz, dass a^{p-1} stets kongruent 1 ist (mod. p). Der Beweis dieser Sätze durch die Methode der Exhaustion, wie GAUSS ihn gibt, war durch eine im wesentlichen gleiche Betrachtung schon von EULER**) erhalten, und schon früher***) hatte dieser den FERMATschen Satz mittels des binomischen Satzes begründet. GAUSS fügte dem einen neuen Beweis mit Hilfe des polynomischen Satzes hinzu.

Wesentlich neu aber war die Bestimmung der Anzahl aller inkongruenten Zahlen, die zu einem gegebenen Teiler d von $p-1$ als Exponenten gehören, aus welcher dann sofort die Tatsache der Existenz einer primitiven Wurzel (mod. p), d. i. einer Zahl g, welche zum Exponenten $p-1$ gehört, hervorging, eine Tatsache, welche nur irrtümlicherweise vordem EULER schon festgestellt zu haben gemeint hatte†). Die Potenzen

$$1, g, g^2, \ldots g^{p-2}$$

---

*) FERMATII Opera mathem., Tolosae 1679, S. 163, Oeuvres II, S. 209.

**) Novi Comment. Acad. Petropol. 7 (1758/59) 1761, S. 49, Opera Omnia, Ser. I, vol. 2, S. 493.

***) Comment. Acad. Petropol. 8 (1736) 1741, S. 141, Opera Omnia, Ser. I, vol. 2, S. 33 und Novi Comment. Acad. Petropol. 1 (1747/8) 1750, S. 20, Opera Omnia, Ser. I, vol. 2, S. 62.

†) Novi Comment. Acad. Petropol. 18 (1773) 1774, S. 85.

einer solchen Wurzel haben die Eigenschaft, dass jede durch p nicht teilbare Zahl einer einzigen von ihnen (mod. p) kongruent ist. Dabei bestimmen die geraden Potenzen dieser Reihe die quadratischen Reste (mod. p), d. i. die Zahlen, welche (mod. p) einer Quadratzahl kongruent sein können. Aus dieser Bemerkung schloss EULER*) — dem eben Gesagten zufolge aber ohne genügende Grundlage — sein bekanntes Kriterium für den quadratischen Charakter einer Zahl a, nach welchem

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv \pm 1 \pmod{p}$$

ist, jenachdem a ein quadratischer Rest (mod. p) ist oder nicht, und konnte ferner den Satz feststellen, dass für eine Primzahl $p = 4n + 1$ stets ganze durch p nicht teilbare Zahlen x, y gefunden werden können, für welche $x^2 + y^2$ durch p teilbar wird**).

Auf festerem und breiterem Grunde baute GAUSS diese Sätze auf. Dem schon Gesagten gemäss gibt es in der obigen Reihe der Potenzen von g eine solche Potenz g^α, dass $a \equiv g^\alpha$ (mod. p); der Exponent α heisst nach GAUSS der Index von a. Aus den Gesetzen, welche diese Indizes befolgen, lässt sich leicht ein Kriterium ableiten, nach welchem die allgemeine binomische Kongruenz

$$x^n \equiv a \pmod{p}$$

auflösbar ist: versteht man unter δ den grössten gemeinsamen Teiler von n und $p-1$, so muss

$$a^{\frac{p-1}{\delta}} \equiv 1 \pmod{p}$$

sein. Für $n = 2$ ergibt sich so von selbst das EULERsche Kriterium. Gehört ferner eine Zahl a zum Exponenten d, so bilden die allein einander inkongruenten Potenzen $1, a, a^2, \ldots, a^{d-1}$ derselben die sogenannte Periode der Zahl a (mod. p) und ihr Produkt ist $\equiv -(-1)^d$. Wird für a eine primitive

---

*) Opuscula analytica I (1783), S. 242, 268, vergl. aber Novi Comment. Acad. Petropol. 1 (1747/8) 1750, S. 20 und 7 (1758/9) 1761, S. 49, Opera Omnia, Ser. I, vol. 2, S. 62 und 493, wo in den Theorematis 11 der ersten und 19 der zweiten Abhandlung das EULERsche Kriterium ohne Zuhilfenahme einer primitiven Wurzel vollkommen streng begründet wird.

**) Novi Comment. Acad. Petropol. 5 (1754/56) 1760, S. 3, Opera Omnia, Ser. I, vol. 2, S. 328.

Wurzel g gewählt, so findet sich hieraus sogleich der bereits von WARING*) mitgeteilte und WILSON zugeschriebene Satz, nach welchem das Produkt aller zu p primen Reste, nämlich

$$1 . 2 . 3 \ldots (p-1) \equiv -1 \pmod{p}$$

ist. Diesen Satz bewies (unter Annahme der Existenz einer primitiven Wurzel) auf dem zuletzt angegebenen Wege vor GAUSS schon EULER**) und aus wesentlich anderen Prinzipien LAGRANGE***). GAUSS aber gab noch einen neuen Beweis des Satzes, der, auf die sogenannten bezüglich p assoziierten Zahlen gegründet, den Vorzug hat, dass er sich auf den allgemeineren Fall eines zusammengesetzten Moduls übertragen lässt. Der von GAUSS nur ausgesprochene, hier geltende verallgemeinerte WILSONsche Satz wurde später auf dem angedeuteten Wege von BRENNECKE†), dann von SCHERING††) bewiesen.

5.

Einige andere Sätze übergehend wenden wir uns nun zur Theorie der quadratischen Reste, welcher der vierte Abschnitt gewidmet ist.

Die Frage nach den quadratischen Resten eines Moduls m ist identisch mit der Frage nach der Auflösbarkeit der binomischen Kongruenz zweiten Grades

$$x^2 \equiv a \pmod{m}.$$

Sie bietet aber eine zwiefache Seite dar, jenachdem man den Modul m oder den Rest a als gegeben betrachtet. In der erstern Annahme verursacht die Beantwortung der Frage keine erhebliche Schwierigkeit. Es ist leicht, sie auf den Fall zurückzuführen, wo der Modul eine Primzahlpotenz ist, und, da sie für den Modul 2^n einfach erledigt und für den Modul p^n, wo p eine ungerade Primzahl bedeutet, aus dem Falle des einfachen Moduls p entschieden werden kann, so handelt es sich schliesslich nur noch um die Kongruenz

*) *Meditationes algebraicae*, Cantabrigae 1770, S. 218.

**) Opuscula analytica I (Petropoli 1783), S. 329.

***) Nouv. Mémoires de l'Acad. Berlin (1771) 1773, 2, S. 125, Oeuvres III, S. 425.

†) CRELLEs Journal für Mathematik **19** (1839), S. 319.

††) Acta Mathematica **1** (1883), S. 153.

$x^2 \equiv a \mod. p$, wo a als durch p nicht teilbar gedacht werden darf. Jenachdem sie möglich ist oder nicht, heisst a nach EULER*) quadratischer Rest oder Nichtrest (residuum oder nonresiduum) von p, nach GAUSS in Zeichen aRp oder aNp. Nach LEGENDRE**) bezeichnet man dieses verschiedene Verhalten, indem man dem Symbole $\left(\frac{a}{p}\right)$ entsprechend den Wert $+1$ oder -1 beilegt. Es gibt der inkongruenten Zahlen a beider Arten gleichviel.

Bei weitem schwieriger aber erwies sich die Beantwortung der Frage in der zweiten der erwähnten Annahmen, der Frage: von welchen ungeraden Primzahlen p eine gegebene Zahl a quadratischer Rest bezw. quadratischer Nichtrest sei. Schon vor GAUSS hatte EULER***) die Antwort auf diese Frage für die Werte $a = -1$ und 3, LAGRANGE†) für $a = 2, 5, 7$ gefunden, und GAUSS selbst begründet zunächst seinerseits die so erhaltenen Sätze. Der berühmte EULERsche Satz, der nach GAUSS' oben erwähnter Aussage der Ausgangspunkt seiner tieferen arithmetischen Forschungen geworden ist, der Satz, dass -1 quadratischer Rest von jeder Primzahl von der Form $4n+1$, Nichtrest von jeder Primzahl von der Form $4n+3$ ist, was sich einfach ausspricht in der Gleichung

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}},$$

folgt unmittelbar aus dem EULERschen Kriterium oder lässt sich mittels assoziierter Zahlen oder auch auf Grund des WILSONschen Satzes erhärten. Für den ebenso schönen Satz, dass 2 quadratischer Rest von jeder Primzahl von einer der Formen $8n+1$, $8n+7$, Nichtrest von jeder Primzahl von einer der beiden Formen $8n+3$, $8n+5$, dass also in LEGENDREscher Bezeichnung

$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$$

ist, gab GAUSS an dieser Stelle seiner D. A. zwei zum Teil von einander abweichende einfache Begründungen. Nun aber zeigte sich, dass für den qua-

---

*) Siehe Novi Comment. Acad. Petropol. 5 (1754/55) 1760, S. 13, Opera Omnia, Ser. I, vol. 2, S. 338.

**) Théorie des Nombres, 3me éd. (1830) I, S. 197.

***) Opuscula Analytica I (1783), S. 135; Novi Comment. Acad. Petrop. 8 (1760/61) 1763, S. 105, Opera Omnia, Ser. I, vol. 2, S. 556.

†) Nouv. Mém. de l'Acad. Berlin (1775) 1777, S. 351, 352, Oeuvres III, S. 791.

dratischen Charakter einer ungeraden Primzahl q bezüglich einer andern solchen Primzahl p kein ähnlicher direkter Ausspruch angebbar, jener vielmehr nur umgekehrt durch den quadratischen Charakter von p in Bezug auf q bestimmbar ist. Das hier geltende eigentümliche Gesetz, das GAUSS durch Induktion fand, war so auch vorher schon von LEGENDRE ermittelt worden*), dem jedoch noch nicht gelang, es streng zu beweisen. Durch KRONECKER**) aber ist zuerst bemerkt worden, dass EULER***) als Entdecker des Gesetzes gelten darf, da er es in einer mit der von GAUSS gegebenen wesentlich identischen Formulierung schon vor LEGENDRE ausgesprochen hat. Diese GAUSSsche Fassung besagt:

Wenn p eine Primzahl von der Form $4n+1$, so ist $+p$, wenn es eine Primzahl von der Form $4n+3$ ist, so ist $-p$ Rest oder Nichtrest von jeder Primzahl, welche positiv gedacht Rest resp. Nichtrest von p ist.

Mit Recht hat GAUSS diesen Satz das theorema fundamentale der quadratischen Reste genannt, da es nicht nur in ihrer Theorie den eigentlichen Kern ausmacht, sondern auch für weitere Teile der höheren Arithmetik grundlegende Bedeutung hat. Kaum aber hat er schon voraussehen können, wie gross dessen Bedeutung für die ganze Entwicklung der Zahlentheorie werden, wie schon seine eigenen weiteren Beweise des Satzes, von denen wir zu sprechen haben werden, sodann die ungefähr 40 andern Beweise, welche wir späteren Forschern zu danken haben, mit immer neuen Gesichtspunkten auch neue Richtungen der Forschung herbeiführen, wie endlich das Bedürfnis, den analogen Satz für Potenzreste höheren Grades zu erledigen, dem schon GAUSS selbst, später besonders KUMMER†) und in unserer Zeit HILBERT††) erfolgreich ihre Bemühungen gewidmet, ganz neue Welten mathematischer Ideen uns eröffnen und gewinnen lassen würde!

---

*) Histoire de l'Acad. des Sciences, Paris 1785, S. 465.

**) Berliner Monatsberichte 1875, S. 267.

***) Opuscula Analytica I (1783), S. 64.

†) Vergl. *Über die allgemeinen Reziprozitätsgesetze u. s. w.* Abhandl. der Berliner Akademie 1859.

††) Math. Annalen (1899) **51**, S. 1—127.

6.

Den ersten strengen Beweis des Gesetzes gab also GAUSS. Er beruht auf der Methode der allgemeinen Induktion und ist dadurch charakterisiert, dass er, ohne aus dem eigentlichsten Gebiete der Theorie der quadratischen Reste herauszutreten, allein mit dem Begriffe eines solchen operiert. Aber er ist recht umständlich, da er acht verschiedene Fälle einzeln zu erledigen nötigt. Mit Verwendung des LEGENDREschen Symbols gelang es später DIRICHLET ihn sehr zu vereinfachen und die acht Fälle auf nur zwei verschiedene zusammenzuziehen. Wenn GAUSS einmal*) gegen eine Äusserung von WARING einwendet, dass Beweise mehr ex notionibus quam ex notationibus geschöpft werden müssten, eine Maxime, welcher die neuere Mathematik weithin Rechnung getragen hat, so hat er zwar mit seinem ersten Beweise des Fundamentaltheorems dies Ziel aufs beste erreicht, gleichwohl zeigt die so übersichtliche DIRICHLETsche Darstellung**), wie auch eine geeignete notatio von nicht zu unterschätzender Bedeutung sein kann. Spricht sich dies doch deutlich in der Fassung aus, welche zuerst LEGENDRE dem Gesetze in der Gleichung

$$\left(\frac{p}{q}\right)\cdot\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}$$

gab, derzufolge wir es jetzt das Reziprozitätsgesetz der quadratischen Reste nennen und in welcher seine grosse Eleganz erst voll zur Erscheinung kommt. Bei beiden Darstellungen aber war es ein Fall, der eine ganz besondere Schwierigkeit verursachte: die für den Beweis erforderliche Tatsache, dass jede Primzahl $p > 5$ und von der Form $4n+1$ positiv oder negativ genommen Nichtrest einer kleineren Primzahl sei; diese Tatsache ist für den Fall $p \equiv 5$ (mod. 8) sehr einfach nachzuweisen, dagegen ist es nicht so für den andern Fall $p \equiv 1$ (mod. 8). Nach GAUSS' eigener Aussage hat er ein volles Jahr mit dieser Schwierigkeit gerungen (W. II, S. 4: per integrum annum me torsit operamque enixissimam effugit), bis es ihm endlich gelang, durch eine einfache und doch tiefe Betrachtung, welche KRONECKER mit Recht eine Kraft-

*) *Disq. Arithm.* art. 76, W. I, S. 60.

**) CRELLES Journal für Mathematik 47 (1853), S. 139; Werke II, S. 121.

probe des GAUSSschen Genius genannt hat, ihrer am 8. April 1796 (Nr. 2 T.) mächtig zu werden.

Nachdem so GAUSS das für zwei Primzahlen p, q geltende Gesetz bewiesen, hat er ihm im art. 133 bereits auch diejenige Allgemeinheit gegeben (am 29. April 1796, Nr. 4 T.), welche mittels des von JACOBI*) verallgemeinerten LEGENDREschen Symbols sich ausspricht in der Gleichung

$$\left(\frac{P}{Q}\right)\cdot\left(\frac{Q}{P}\right) = (-1)^{\frac{P-1}{2}\cdot\frac{Q-1}{2}+\frac{\delta-1}{2}\cdot\frac{\varepsilon-1}{2}},$$

worin P, Q zwei teilerfremde ungerade Zahlen und δ, ε den Vorzeichen von P, Q resp. entsprechend gleich ± 1 sind; wie er denn auch die sogenannten Ergänzungssätze d. i. die obigen Sätze für -1 und 2, die nun aus dem Fundamentaltheoreme aufs neue bewiesen werden konnten (art. 145, nach Nr. 56 T. am 4. Febr. 1797), auf den Fall ausgedehnt hat, dass p eine zusammengesetzte positive ungerade Zahl ist. So ward es dann auch möglich, den quadratischen Charakter einer beliebigen Zahl in Bezug auf einen beliebigen zu ihr teilerfremden ungeraden Modul zu bestimmen, sowie die Linearformen der sogenannten Teiler und Nichtteiler von x^2-a d. i. der Primzahlen, von denen die Zahl a quadratischer Rest bezw. Nichtrest ist, aufzustellen.

c) Binäre quadratische Formen.

7.

Das bisher Dargestellte ist in der Hauptsache von GAUSS bereits gefunden, bevor er Kenntnis von der schon vor ihm vorhandenen Literatur gewann. Das Studium der Arbeiten von LAGRANGE und LEGENDRE machte ihn aber mit einem Gebiete der Zahlentheorie bekannt, das seinem Interesse bis dahin fremd gewesen zu sein scheint, mit der Theorie der quadratischen Formen. Anfänge dieser Theorie als Probleme der additiven Zahlentheorie, wie die Frage nach der Zerfällbarkeit einer Zahl n in die Summe zweier Quadratzahlen oder in die Summe einer Quadratzahl und einer mehrfachen andern Quadratzahl, d. i. nach den Auflösungen der Diophantischen Gleichung

---

*) Berliner Monatsberichte 1837, S. 127; Werke VI, S. 254.

$$n = x^2 + my^2$$

und Ähnliches fand sich schon bei FERMAT*), besonders aber bei EULER**), welcher auch bereits die eng damit verbundene allgemeine Gleichung zweiten Grades mit zwei Unbekannten durch ganze oder rationale Werte der letzteren zu lösen unternommen hatte***). Hieran anknüpfend hatten LAGRANGE†) und LEGENDRE††) die allgemeinere Frage nach der Darstellung einer Zahl durch einen Ausdruck von der Gestalt

$$ax^2 + bxy + cy^2$$

behandelt und bereits eine Fülle von schönen und wichtigen Ergebnissen gewonnen, als GAUSS vom 22. Juni 1796 an (s. Nr. 15 T.) diesen Fragen nahe trat.

Im Vergleich zu seinen Arbeiten lassen diejenigen seiner Vorgänger, so tief sie auch schon eindrangen, sich ähnlich kennzeichnen, wie es GAUSS†††) von DIOPHANTS arithmetischen Arbeiten aussagt: dass sie mehr dexteritatem quandam scitamque tractationem quam principia profundiora gewiesen und, nimis specialia, nur selten ad conclusiones generaliores geführt hätten. Das Gold zum Ringe zu zwingen war ihnen noch nicht gelungen. Erst GAUSS entwickelte im fünften Abschnitte seiner D. A. die Theorie der quadratischen Formen methodisch von sicherer Grundlage aus und führte sie zu bis dahin ungeahnten Höhen und Gesichtspunkten. Schon die konsequente Verwendung der Bezeichnung »quadratische Form« (forma secundi gradus) für die ganze homogene Funktion zweiten Grades mit zwei oder mehr Unbestimmten rührt von GAUSS her; LAGRANGE wie LEGENDRE nennen jene Ausdrücke expressions oder formules und sprechen nur beiläufig von den Teilern eines Ausdrucks $x^2 \pm my^2$ als einer forme linéaire oder quadratique; ähnlich auch EULER. Übrigens nimmt GAUSS abweichend von LEGENDRE die quadratische Form in

*) Oeuvres II, S. 403 (Brief an KENELM DIGBY).

**) Comm. Acad. Petrop. 14 (1744/6) 1751, S. 151; Opera Omnia, Ser. I, vol. 2, S. 194; Novi Comm. Acad. Petrop. 18 (1773) 1774, S. 218.

***) Comm. Acad. Petrop. 6 (1732/33) 1738, S. 175, Opera Omnia, Ser. I, vol. 2, S. 6, Novi Comm. Acad. Petrop. 9 (1762/63) 1764, S. 3, Opera Omnia, Ser. I, vol. 2, S. 576 und 18 (1773) 1774, S. 185.

†) Mém. de l'Acad. Berlin (1767) 1769, 23, S. 165 u. (1768) 1770, 24, S. 181, Oeuvres II, S. 375 u. S. 655; *Additions aux Élémens d'Algèbre d'Euler*, 1774, § II, VII, VIII, Oeuvres VII, S. 45, 118, 157.

††) Mém. de l'Acad. Paris (1785) 1788, S. 465.

†††) *Disqu. Arithm.*, praefatio, W. I, S. 6.

der Gestalt

$$f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

die er, wo es auf die Unbestimmten nicht ankommt, kurz mit $f = (a, b, c)$ bezeichnet, also mit geradem mittleren Koeffizienten. Das beruht auf dem Umstande, dass GAUSS seine Theorie auf formal algebraischer Grundlage erbaut, wo er dann durch solche Beschränkung das Auftreten gebrochener Zahlen verhütet, es macht aber andererseits mancherlei Unterscheidungen, wie diejenige der Formen in eigentlich und uneigentlich primitive u. a. notwendig, wodurch die Theorie wieder beschwert wird und manche ihrer Ergebnisse an Einfachheit verlieren. Als es später gelang, aus der algebraischen Schale der Theorie ihren eigentlich arithmetischen Kern herauszuschälen, indem man sie als Theorie des quadratischen Zahlenkörpers erfasste und so von dem ursprünglich additiv-zahlentheoretischen Probleme der Darstellung einer Zahl durch eine quadratische Form wieder zur multiplikativen Zahlentheorie zurückkehrte, der LEGENDRE mit dem Begriffe des quadratischen Teilers näher verbunden geblieben war als GAUSS, musste man jene Beschränkung wieder aufgeben*).

8.

GAUSS errichtet nun das Gebäude seiner Theorie auf zwei algebraischen Grundeigenschaften der quadratischen Formen.

Die eine von ihnen ist die Identität

$$f(x, y) \cdot f(x', y') = [(ax + by)x' + (bx + cy)y']^2 - D(xy' - x'y)^2,$$

worin D, die Verknüpfung der Koeffizienten

$$D = b^2 - ac,$$

als eine die ganze Theorie beherrschende Zahl von GAUSS als Determinante der Form benannt worden ist; je nach ihrem Vorzeichen zerfallen die Formen in zwei Gattungen, welche vielfach ein sehr verschiedenes Verhalten zeigen.

---

*) Das Verhältnis der Untersuchungen von GAUSS und LEGENDRE, die sich in vielen Punkten berühren, wird in dem weiter unten folgenden Aufsatze von P. STÄCKEL »GAUSS als Geometer« zusammenfassend dargestellt; es ist darum in diesem Aufsatze auf die Arbeiten LEGENDRES zur Zahlentheorie nicht ausführlicher eingegangen worden.

Aus der obigen Identität ergibt sich sogleich die zur eigentlichen Darstellung von n durch (a, b, c) d. i. zur Darstellung mittels teilerfremder Werte x, y notwendige Bedingung, dass D quadratischer Rest von n sei, sowie die Erkenntnis, dass zwischen den vorhandenen eigentlichen Darstellungen und den Wurzeln der Kongruenz

$$z^2 \equiv D \pmod{n}$$

ein enger Zusammenhang besteht, dem gemäss jede solche Darstellung als zu einer bestimmten der Kongruenzwurzeln »gehörig« bezeichnet werden darf.

Die zweite Grundeigenschaft ist die Transformation einer quadratischen Form

$$ax^2 + 2bxy + cy^2$$

mittels einer linearen ganzzahligen Substitution

$$x = \alpha x' + \beta y', \; y = \gamma x' + \delta y'$$

in eine andere Form

$$a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2,$$

deren Determinante

$$D' = D \cdot (\alpha\delta - \beta\gamma)^2$$

ist und welche unter der ersteren enthalten, insbesondere, wenn der Substitutionsmodul $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$ ist, ihr äquivalent genannt wird. Die zuerst von Gauss getroffene Unterscheidung solcher Äquivalenz in eine eigentliche und uneigentliche je nach dem Vorzeichen von ± 1 verleiht der ferneren Entwicklung erhebliche Klarheit und Einfachheit.

Das Problem der Darstellung einer Zahl n durch eine gegebene Form f wird nunmehr zurückgeführt auf die Frage, ob diese Form mit gewissen andern Formen F mit gleicher Determinante, von denen je eine der Wurzel entspricht, zu der die Darstellung gehörig gedacht wird, äquivalent sei. Die neue Frage aber entscheidet sich durch eine zwiefache Untersuchung. Die eine von ihnen lehrt, dass eine gegebene Form durch eine Kette von sogenannten benachbarten Formen, deren jede mit der vorhergehenden eigentlich äquivalent ist, in eine ihr eigentlich äquivalente Form übergeführt werden kann, deren Koeffizienten durch gewisse Ungleichheiten beschränkt sind und welche reduziert genannt wird,

womit sich dann zugleich auch eine Transformation der gegebenen Form in die reduzierte ergiebt. Diesen Umstand und dass die Anzahl der reduzierten Formen nur endlich ist, fand GAUSS schon als von LAGRANGE*) nachgewiesen vor. Durch die andere Untersuchung wird festgestellt, ob zwei solche reduzierte Formen selbst einander äquivalent sind oder nicht, und im erstern Falle eine Transformation der einen in die andere gegeben. Hierdurch ermöglicht sich nicht nur die Entscheidung jener Frage für jede der gedachten Formen F, sondern auch im Falle der Äquivalenz eine Transformation der gegebenen Form in jede ihr äquivalente unter diesen.

Die Bestimmung der reduzierten Formen ist aber eine ganz verschiedene, jenachdem die Determinante D eine positive (nicht quadratische) oder negative Zahl ist. Während im letztern Falle die zweite Untersuchung sehr einfach ist, bereitet sie im erstern grössere Schwierigkeit. In ihm zerfallen die reduzierten Formen in eine endliche Anzahl von Perioden benachbarter Formen, welche also einander äquivalent sind; dass aber Formen verschiedener Perioden es nicht sind, erfordert einen umständlicheren Beweis, der, wenn man auf sein Wesen sieht, auf die Entwicklung der sogenannten »Wurzeln« einer reduzierten Form in einen Kettenbruch begründet ist, wie später DIRICHLET**) sehr schön und einfach klargelegt hat. Wenn nun auf dem angedeuteten Wege eine Transformation der Form f in eine der Formen F ermittelt ist, so lassen sie sich sämtlich aufstellen, sobald man alle Auflösungen der von EULER***) als PELLschen bezeichneten Gleichung

$$t^2 - Du^2 = 1$$

anzugeben weiss. Diesen Teil der Aufgabe, der für eine negative Determinante sich unmittelbar erledigt, löste für den Fall einer positiven Determinante schon LAGRANGE†), der auch zuerst die Existenz einer Auflösung nachwies, auf Grund der Kettenbruchentwicklung für die Quadratwurzel aus D. Die für den

---

*) Nouv. Mém. de l'Acad. Berlin (1773) 1775, S. 265; Oeuvres III, S. 695.

**) Vergl. *Vorlesungen über Zahlentheorie*, herausg. von DEDEKIND, 4. Aufl. 1894 § 79—82.

***) Comment. Acad. Petrop. 6 (1732/3) 1738, S. 175, Opera omnia, Ser. I, vol. 2, S. 6; Novi comment. Acad. Petrop. 11 (1765) 1767, S. 28; *Vollständige Anleitung zur Algebra* (1770), II. Teil, II. Abschnitt, Kap. 7; Opuscula analytica I (1783), S. 310.

†) Miscell. Taur. 4 (1766/9), S. 19; Oeuvres I, S. 669; Mém. de l'Acad. Berlin (1767) 1769, 23, S. 165, Oeuvres II, S. 375; *Additions aux Elémens d'Algèbre par L. Euler*, § II, VIII, Oeuvres VII, S. 45, 157.

gleichen Zweck von GAUSS gegebene Analyse, von der er sagt, sie sei ex principiis omnino diversis petita, und welche durch Verbindung der Transformation einer reduzierten Form in die erste in ihrer Periode ihr gleiche mit der identischen Transformation zum Ziele gelangt, kommt gleichwohl, da die Äquivalenz der aufeinanderfolgenden reduzierten Formen mit der Äquivalenz ihrer Wurzeln identisch, die letztere aber mit jener Kettenbruchentwicklung aufs engste verbunden ist, im Wesen mit der von LAGRANGE überein.

So haben wir die Ergebnisse der von GAUSS in streng logischer Verkettung und mit grösster Vollständigkeit unter Berücksichtigung aller Nebenumstände, wie der Formen mit quadratischer oder der Null gleicher Determinante usw., entwickelten Elemente der Theorie in der Hauptsache geschildert. Als deren Abschluss können wir die Verteilung aller Formen mit einer gegebenen Determinante auf eine endliche Anzahl von Klassen unter einander äquivalenter Formen, die übrigens schon LAGRANGE*) zugehört, betrachten. Aus der allgemeinen Theorie aber fliessen nun als aus ihrer eigentlich wissenschaftlichen Quelle die schon von FERMAT**) erkannten Sätze von der Darstellbarkeit einer Primzahl von der Form $4n+1$, von einer der Formen $8n+1$ oder $8n+3$, und von der Form $6n+1$ bezw. in den Formen x^2+y^2, x^2+2y^2, x^2+3y^2, von denen der erste durch EULER***), der zweite durch LAGRANGE†), der dritte wieder durch EULER††) zuerst bewiesen worden war. Den ersten derselben hat GAUSS an einer späteren Stelle der D. A. (art. 265) noch einmal aus tieferen Prinzipien wieder hergeleitet.

9.

Nunmehr aber beginnt das üppig fruchtbare Neuland, um welches GAUSS' eigenste Forschung die Lehre von den quadratischen Formen bereichert hat. Zur Einteilung der Formen mit gegebener Determinante D in Klassen tritt

---

*) Nouv. Mém. de l'Acad. Berlin (1773) 1775, S. 265; Oeuvres III, S. 695.

**) Oeuvres II, S. 403 ff.

***) Novi Comment. Acad. Petrop. 1 (1747/8) 1750, S. 20; 4 (1752/3) 1758, S. 3; 5 (1754/5) 1760, S. 3. Opera Omnia, Ser. I, vol. 2, S. 62; 295; 328.

†) Nouv. Mém. de l'Acad. Berlin (1775) 1777, S. 323, Oeuvres III, S. 759. Vgl. auch EULER, Novi Comment. Acad. Petrop. 6 (1756/7) 1761, S. 185, Opera Omnia, Ser. I, vol. 2, S. 459.

††) Novi Comment. Acad. Petrop. 8 (1760/1) 1763, S. 105, Opera Omnia, Ser. I, vol. 2, S. 556.

hinzu die weitere Einteilung dieser Klassen in Ordnungen, je nach dem grössten gemeinsamen Teiler m der Koeffizienten $a, 2b, c$ ihrer Formen (a, b, c), der für alle Formen einer Klasse derselbe ist. Hervorzuheben sind hier die eigentlich — und eventuell die uneigentlich — primitive Ordnung, für welche $m = 1$ resp. $m = 2$ ist. Die Klassen einer primitiven Ordnung zerfallen nun wieder in mehrere Geschlechter. Für alle zu $2D$ teilerfremden Zahlen n nämlich, welche durch eine primitive Form darstellbar sind, sind ihre quadratischen Charaktere bezüglich der einzelnen Primfaktoren der Determinante und in besonderen Fällen auch bezüglich der Moduln 4 oder 8 die gleichen. Diese Einzelcharaktere, deren Anzahl λ heisse, bilden zusammen den Gesamtcharakter der Form und auch der Klasse, der sie angehört, und alle Klassen, deren Gesamtcharakter derselbe ist, bilden ein Geschlecht. Die Anzahl aller denkbaren Gesamtcharaktere ist $\chi = 2^{\lambda}$, und es entsteht die Frage, ob für jeden von ihnen ein entsprechendes Geschlecht wirklich vorhanden ist.

Zu ihrer Beantwortung dient eine eigentümliche Rechnung, deren Elemente nicht Zahlen, sondern Formenklassen sind. Sie gründet sich auf die sogenannte Zusammensetzung quadratischer Formen, für welche die oben (S. 18) eingeführte GAUSSsche Grundformel das einfachste Beispiel ist: eine Form

$$AX^2 + 2BXY + CY^2$$

heisst aus den beiden andern:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2, \quad a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2$$

zusammengesetzt, wenn sie durch eine bilineare Substitution, deren Koeffizienten gewisse Bedingungen erfüllen, in ihr Produkt übergeht. Aus der von GAUSS wieder im Gewande algebraischer Beziehungen gehaltenen ausführlichen allgemeinen Theorie solcher Zusammensetzung entnehmen wir hier nur die wesentlichsten Folgesätze. Ist F eine aus den Formen f, f' und F_1 eine aus den Formen f_1, f_1' zusammengesetzte Form, so gehören F, F_1 derselben Klasse an, wenn sowohl von f, f_1 als auch von f', f_1' je dasselbe gilt. Somit darf die Klasse von F aus den Klassen von f, f' zusammengesetzt heissen.

GAUSS fasst diese Zusammensetzung zweier Klassen C, C' als eine additive Verknüpfung $C + C'$ derselben; zweckmässiger ist es, sie als eine Multipli-

kation zu fassen und die zusammengesetzte Klasse als Produkt der beiden andern durch $C . C'$ zu bezeichnen. Auf Grund dieser Definition liefert nun die Gesamtheit der primitiven Formenklassen — abgesehen etwa von den Potenzen einer primitiven Wurzel (mod. p), auf deren Analogie GAUSS selbst (art. 306, VI) hingewiesen hat — das erste Beispiel eines Begriffes, der bald nach GAUSS in der gesamten Mathematik weitreichende Herrschaft eingenommen hat, des Begriffs der Gruppe, speziell der ABELschen Gruppe. Die Zusammensetzung der Formenklassen ist kommutativ und assoziativ; nennt man die Form $x^2 - Dy^2$ die Hauptform, die Klasse, der sie angehört, die Hauptklasse, das Geschlecht, welches die letztere enthält, das Hauptgeschlecht, so spielt die Hauptklasse bei der Zusammensetzung die Rolle der Einheit, indem jede Klasse bei der Zusammensetzung mit ihr ungeändert bleibt; zwei entgegengesetzte Klassen, nämlich solche, in denen entgegengesetzte Formen (a, b, c), $(a, -b, c)$ auftreten, sind einander reziprok d. h. sie setzen sich zur Hauptklasse zusammen.

Aus diesen von GAUSS hergeleiteten Sätzen folgt nun nach einem allgemeinen für ABELsche Gruppen von KRONECKER*) bewiesenen Satze, was speziell für die Gruppe der Formenklassen vorher schon SCHERING**) gezeigt hat, dass alle Klassen eindeutig aus einer kleinsten Anzahl fundamentaler Klassen zusammensetzbar sind. Soweit ist aber GAUSS noch nicht gelangt, wenigstens enthalten seine Aufzeichnungen nichts, was sich darauf bezieht; er hat nur noch an einer späteren Stelle der D. A. (in artt. 305 u. 306) sowie in einem nachgelassenen, aus dem Jahre 1801 (s. W. II, S. 268) stammenden Fragmente (W. II, S. 266) für diejenige Untergruppe, welche aus den Klassen des Hauptgeschlechtes besteht, solche Darstellung ihrer Klassen mittels fundamentaler begonnen. Lassen sie sich sämtlich durch den Zyklus $C, C^2, C^3, \ldots, C^k$ der verschiedenen Potenzen einer einzigen darstellen, so nennt er die Determinante D regulär, andernfalls irregulär, und bezeichnet, wenn dann jener Zyklus der grösste der vorhandenen ist, den Quotienten $\frac{g}{k}$, in welchem g die Anzahl aller Klassen des Hauptgeschlechts bedeutet, als den Exponenten der Irregularität; der art. 306, VIII. (W. I, S. 374) enthält hierüber noch mancherlei Aussagen,

---

*) Berliner Monatsberichte 1870, S. 881, Werke I, S. 271.

) *Die Fundamental-Classen der zusammensetzbaren arithmetischen Formen*, Göttinger Abhandlungen **14 (1869), Werke I, S. 135.

u. a. dass die Determinante stets regulär ist, wenn g keinen quadratischen Teiler hat, dass in der wachsenden Reihe der negativen Determinanten die Menge der irregulären stets zuzunehmen scheint, usw.

10.

Zu den früheren Betrachtungen zurückkehrend begegnen wir der Frage nach dem Verhältnis der Anzahl der Klassen in irgend einer Ordnung O zur Anzahl der eigentlich primitiven Klassen. Es findet sich gleich der Anzahl der letzteren Formen, welche mit einer besonderen Form jener Ordnung zusammengesetzt diese Form reproduzieren. Heisst diese (A, B, C), so sind das diejenigen eigentlich primitiven Formen, durch welche A^2 darstellbar ist. GAUSS hat ihre Anzahl berechnet für negative Determinanten, für positive aber nur zwischen ihr und der Fundamentalauflösung der PELLschen Gleichung einen Zusammenhang erkannt, den erst nach ihm DIRICHLET klargelegt und bestimmt hat*.

Ferner heben wir den Satz hervor, dass in jedem Geschlechte derselben Ordnung gleichviel Klassen befindlich sind, beschränken fortan die Betrachtung auf die eigentlich primitive Ordnung und müssen nun besonders der sogenannten Anzepsklassen gedenken, die dadurch charakterisiert sind, dass sie durch Duplikation d. i. durch Zusammensetzung mit sich selbst die Hauptklasse hervorbringen. Von grösster Wichtigkeit ist die GAUSSsche Bestimmung ihrer Anzahl α, welche gleich der halben Anzahl aller angebbaren Gesamtcharaktere: $\alpha = \frac{1}{2}\chi$ gefunden wird. Andererseits ist die Anzahl aller eigentlich primitiven Klassen $h = g \cdot \gamma$, wo γ die Anzahl ihrer Geschlechter, während sich zeigen lässt, dass auch $h = \alpha \cdot \delta$ gesetzt werden kann, wenn δ die Anzahl derjenigen unter jenen Klassen bedeutet, welche durch Duplikation entstehen können. Da alle diese aber zum Hauptgeschlechte gehören müssen, sodass $\delta \leqq g$ sein muss, so ergibt sich $\gamma \geqq \alpha$ d. h. der Satz, dass die Anzahl der Geschlechter höchstens halb so gross, wie die aller angebbaren Gesamtcharaktere, dass also für die Hälfte der letztern gewiss kein entsprechendes Geschlecht vorhanden ist.

Nur beiläufig und doch als ein Glanzpunkt in der Reihe dieser Betrach-

---

* *Recherches sur diverses applications de l'Analyse infinitésimale à la théorie des nombres* § 8, CRELLES Journal für Mathematik 21, 1840, S. 10, Werke I, S. 470.

tungen knüpft sich an das letztere Ergebnis, indem es auf den Fall angewandt wird, wo die Determinante eine positive oder negative Primzahl bezw. das Produkt von zwei solchen ist, der zweite, am 27. Juni 1796 (Nr. 16 T.) gefundene GAUSSsche Beweis des Reziprozitätsgesetzes und seiner beiden Ergänzungssätze an, ein Beweis, der, in seiner Grundlage scheinbar so gänzlich fremd der Frage, auf welche er zielt, eben wegen der Verbindung ganz verschiedener Gedankenreihen, die er knüpft, als der tiefste all' seiner Beweise des Gesetzes bezeichnet werden darf.

d. Ternäre quadratische Formen. Der VI. Abschnitt der D. A.

11.

Noch tiefer dringend aber ist das von GAUSS erkannte Mittel, um die durch den zuvor angeführten Satz nur beschränkte Anzahl γ der Geschlechter genau zu bestimmen. Es ist die Theorie der ternären quadratischen Formen

$$f = ax^2 + a'x'^2 + a''x''^2 + 2bx'x'' + 2b'x''x + 2b''xx',$$

für welche der Ausdruck

$$\Delta = ab^2 + a'b'^2 + a''b''^2 - aa'a'' - 2bb'b''$$

die Determinante der Form genannt wird. An sich zwar lag der verallgemeinernde Fortschritt von den binären quadratischen Formen zu den quadratischen Formen mit mehreren Unbestimmten oder auch zu Formen höheren Grades nahe genug. Immerhin hat GAUSS mit dem am 14. Februar 1799 (Nr. 96 T.) begonnenen erfolgreichen Beschreiten dieser Richtung der weiteren Forschung ein schier unermessliches Feld gewiesen, auf welchem dann später die Bemühungen von EISENSTEIN*), von H. ST. SMITH**) und MINKOWSKI***) u. A. den reichsten Ertrag geliefert haben. Für seinen Zweck bedurfte GAUSS nur der ersten Elemente der Theorie. Diese laufen, obwohl sie mannigfaltigere

*) CRELLES Journal für Mathematik **35** (1847), S. 117, Gesammelte Abhandlungen, S. 177; Berliner Monatsberichte 1852, S. 356.

) London Transactions **157 (1867), S. 255, Papers I, S. 455. Mém. Sav. Étrang. Paris (2) **29** (1887) Nr. 1, S. 55, Papers II, S. 677.

***) Mém. Sav. Étrang. Paris (2) **29** (1887) Nr. 2, S. 159, 164.

Verhältnisse und neue Probleme darbieten, denjenigen der binären Formen ganz parallel.

Zur Seite einer Form f ist stets eine zweite F, ihre Adjungierte, zu betrachten, deren Koeffizienten durch diejenigen der Form f bestimmt sind, deren Determinante gleich Δ^2, und deren eigene Adjungierte im wesentlichen wieder mit f selbst identisch ist. Auch hier ist dann jede Form einer reduzierten äquivalent, in welcher ebenso wie in der dazu Adjungierten die Koeffizienten durch gewisse Ungleichheiten beschränkt sind: die Anzahl der reduzierten Formen ist endlich. Neben Zahlen sind aber durch ternäre Formen auch binäre Formen darstellbar, und zwar entspricht einer Darstellung der binären Form $\varphi = (p, q, r)$ durch eine ternäre Form f eine Darstellung ihrer Determinante D durch deren Adjungierte F und umgekehrt; die letztern Darstellungen lassen sich also auf die erstern zurückführen. Diese aber gehören wieder zu gewissen Kongruenzwurzelpaaren g, h (mod. D), nämlich zu einer Lösung der Kongruenzen

$$g^2 \equiv \Delta p, \; gh \equiv -\Delta q, \; h^2 \equiv \Delta r \pmod{D}$$

oder, wie GAUSS kurz sagt, zur Wurzel $\sqrt{\Delta(p, -q, r)}$ (mod. D), und die Aufgabe, sie sämtlich zu finden, läuft auf die andere hinaus, die ganzzahligen Transformationen der gegebenen Form f in gewisse andere, jenen Lösungen verbundene Formen mit derselben Determinante und in sich selbst zu ermitteln.

Die Lösung der letztern Aufgabe jedoch wurde von GAUSS nicht mehr allgemein gegeben. In den D. A. findet sie sich nur noch für die Form

$$ax^2 + a'x'^2 + a''x''^2$$

mit positiven a, a', a'', und in einer kurzen, in einem am 22. November 1799 begonnenen Notizhefte (Scheda Ac, S. 22) des Nachlasses enthaltenen Notiz (W. II, p. 311) für die Form $x^2 + x'^2 - x''^2$. Für Formen, durch welche nur positive Zahlen darstellbar sind, hat in der Folge ein Schüler von GAUSS, L. A. SEEBER, ausgehend von kristallographischen Fragestellungen, diese Aufgabe wieder aufgenommen*). Seine Arbeit von 1831 bedeutete aber auch darin

*) Siehe SEEBERS Arbeiten: *Versuch einer Erklärung des innern Baues der festen Körper*, GILBERTS Annalen der Physik 76, 1824, S. 229 und S. 349; *Untersuchung über die Eigenschaften der positiven ternären quadratischen Formen*, Freiburg im Breisgau 1831. In der ersten Arbeit wird für eine Teilung des

einen Fortschritt über GAUSS' Darstellung der Theorie, dass es ihm gelungen ist, die Bedingungen für reduzierte Formen so zu fassen, dass in jeder Klasse nur eine von diesen vorhanden ist, sodass die schwierige Frage nach der Äquivalenz reduzierter Formen ganz wegfällt. GAUSS sah sich durch seine Anzeige von SEEBERS Arbeit (Gött. gel. Anz. vom 9. Juli 1831, W. II, S. 188) veranlasst, sich aufs Neue mit den ternären quadratischen Formen zu befassen, und gab zunächst den Beweis der von SEEBER nur induktiv gemachten Bemerkung, dass für die reduzierten Formen stets $aa'a'' < 2\Delta$ sei.

GAUSS ist aber bei dieser Gelegenheit auch auf die geometrische Deutung der Theorie der quadratischen Formen, sowohl der binären wie der ternären, eingegangen, indem er ihren Zusammenhang mit den sogenannten Zahlengittern in der Ebene und im Raume, den geometrischen Sinn der eigentlichen wie der uneigentlichen Äquivalenz sowie der zuvor angeführten SEEBERschen Ungleichheit klarlegte und im Anschluss an SEEBER den Wert der Theorie der ternären Formen als eines Hilfsmittels für die Kristallographie hervorhob; in einem kurzen, aus dem Juli 1831 (W. II, S. 311) stammenden Fragmente (W. II, S. 305) hat GAUSS seine bezüglichen Andeutungen durch eine Reihe raumgeometrischer Sätze weiter ausgeführt und für die letztgenannte Disziplin verwertet. Übrigens war ihm die Vorstellung der ebenen Zahlengitter, wenigstens solcher von besonderer Art, lange vor jener späten Veröffentlichung schon vertraut. Schon die doppelte Periodizität der lemniskatischen, allgemeiner der elliptischen Funktionen, deren Untersuchung ihn bereits zu der Zeit der D. A. beschäftigte, konnte sie ihm nahe legen. Als ihm dann, mit unter dem Einflusse dieser Untersuchungen, der Gedanke kam, der Theorie der biquadratischen Reste die komplexen ganzen Zahlen $a+bi$ zu Grunde zu legen, boten sich ihm die quadratischen, bei den kubischen Resten auch die parallelogrammatischen Zahlengitter dar, von denen er sowohl

ganzen Raumes »in kleine Parallelepipede, die sowohl einander selbst, als den parallelepipedischen Molekulen gleich sind«, das Quadrat des Abstands zweier Eckpunkte durch eine positive ternäre Form dargestellt (a. a. O. S. 353) und so eine geometrische Deutung dieser Formen gegeben. In dem Vorwort zu der Schrift von 1831 heisst es dann (S. II) in bezug auf die Aufgabe, die Kriterien für die Äquivalenz aufzustellen: »Ein Versuch, die Art, auf welche die festen Körper aus den kleinsten Teilen der Materie gebildet sind, aus den Gesetzen der Mechanik zu erklären, führte mich zur Auflösung dieser Aufgabe« und weiter (S. VIII) »Mithin ist die Theorie der positiven ternären quadratischen Formen wenigstens ein nützliches oder sogar notwendiges Hilfsmittel der Kristallographie«.

in seinen Abhandlungen W. II, S. 65 u. 93, wie in den nachgelassenen Schriftstücken W. II, S. 313—374 und VIII, S. 18 verschiedentlich Gebrauch gemacht hat; desgleichen auch bei dem geometrischen Hilfssatze W. II, S. 271, 277, auf welchen er seine Bestimmung der Klassenanzahl quadratischer Formen stützt. In der Theorie der letztern aber, wie die D. A. sie enthalten, tritt die gedachte geometrische Vorstellung nirgends zu Tage, so wenig wie die damit verwandte Zerlegbarbeit der Formen in irrationale Linearfaktoren, zu der namentlich die Lehre von der Komposition der Formen den besten Anlass bot*); erst DIRICHLET**) hat von der letzteren ausgiebigeren Gebrauch gemacht und in neuerer Zeit hat F. KLEIN***) gezeigt, wie schön die Zahlengitter zur Veranschaulichung der Kompositionslehre benutzt werden können. Welche ganz neuen arithmetischen Probleme aber aus der Gittervorstellung entspringen, hat dann MINKOWSKI in seiner *Geometrie der Zahlen* (Leipzig, 1896) und in den bezüglichen späteren Arbeiten in weitem Umfange entwickelt.

12.

In den D. A. leistet die Theorie der ternären quadratischen Formen aber den ebenso wichtigen Dienst, durch ihre Anwendung auf die Darstellung einer binären Form durch die besondere ternäre Form $x^2 - 2x'x''$ erkennen zu lassen, dass jede Klasse des Hauptgeschlechts binärer Formen durch Duplikation entsteht, mithin $\delta = g$, also auch $\gamma = \alpha = \frac{1}{2}\chi$ und somit für die eine Hälfte aller Gesamtcharaktere stets ein dem betreffenden Charakter entsprechendes Geschlecht vorhanden ist. Das Reziprozitätsgesetz gestattet auch, diese Hälfte der Gesamtcharaktere näher zu bestimmen; sie umfasst diejenigen, für welche

*) Es möge hier noch darauf hingewiesen werden, dass EULER (*Vollständige Anleitung zur Algebra* II, 1770, 2. Abschnitt, 11. und 12. Kapitel, Opera omnia, Ser. I, vol. 1, S. 414 ff.) und LAGRANGE (siehe dessen *Additions aux Élémens d'Algèbre d'Euler*, 1774, § IX, Oeuvres VII, S. 164) die irrationalen Linearfaktoren einer binären quadratischen Form herangezogen haben, um Fälle zu finden, unter denen eine solche Form ein Quadrat oder sonst irgend eine Potenz darstellt. LAGRANGE hat a. a. O. auch die Zusammensetzung binärer quadratischer Formen, wie überhaupt solcher Formen, die sich in Linearfaktoren zerlegen lassen, mit sich selbst bewerkstelligt, indem er von dieser Zerlegung ausgeht und die Linearfaktoren dann in abgeänderter Reihenfolge mit einander multipliziert.

) CRELLES Journal f. Mathem. **19 (1839), S. 321 und **24** (1842) S. 291, Werke I, S. 411 und S. 533.

***) Göttinger Nachrichten 1893, S. 106, ausführlicher in den Autographierten Vorlesungsheften (*Ausgewählte Kapitel der Zahlentheorie* (1895/6) II 1897, S. 118.

$\left(\frac{D}{n}\right) = 1$ ist, wenn n eine durch eine Form des entsprechenden Geschlechts darstellbare, zu $2D$ teilerfremde Zahl bedeutet.

GAUSS hat sich nicht getäuscht, wenn er art. 287 Schluss meinte, diese so einfach lautenden und doch so tief wurzelnden Sätze zu den allerschönsten der ganzen Arithmetik rechnen zu dürfen.

Nachdem GAUSS diesen hochbedeutsamen Punkt festgestellt hatte, führte ihn die Theorie der ternären Formen auch zu andern schönen Ergebnissen. Er bestimmte die Anzahl eigentlicher Darstellungen sowohl einer Zahl wie einer binären Form als Summe dreier Quadrate. Während für die Zahlen von den Formen $8z$, $8z+4$, $8z+7$ keine solche möglich ist, lässt jede andere Zahl n eine Anzahl von Darstellungen zu, welche bemerkenswerter Weise von der Anzahl der Klassen im Hauptgeschlechte derjenigen binären Formen abhängt, deren Determinante $-n$ ist. So lieferte schon GAUSS ein ausgezeichnetes Beispiel viel allgemeinerer Ergebnisse, zu denen nach ihm namentlich H. ST. SMITH und MINKOWSKI gelangt sind und bei denen der von EISENSTEIN* neu eingeführte Begriff des Masses von Formen oder Darstellungen als bestimmend in den Vordergrund tritt.

In Ea 5 des Nachlasses (W. X 1, S. 80) findet sich ein Satz und Bruchstücke zu seinem Beweise, der als Vorläufer zu dem berühmten Satze der D. A. art. 291 betrachtet werden kann. Aus der Darstellung als Summe dreier Quadratzahlen folgerte GAUSS dann leicht auch den zuvor noch unbewiesenen FERMATschen Satz, dass jede Zahl als Summe dreier Dreieckszahlen darstellbar sei. Das EYPHKA, mit welchem GAUSS in Nr. 18 T. unter dem 10. Juli 1796 seinen auf diesen Satz bezüglichen Fund hervorhebt, lässt auf den Wert schliessen, den er ihm beigemessen hat, und gestattet die Folgerung, dass, was er gefunden, neu für ihn war. Wenn es die induktive Tatsache des FERMATschen Ausspruchs war, so musste er ihm damals also noch unbekannt sein. Ein direkter, von der Theorie der ternären quadratischen Formen unabhängiger Beweis ist es gewiss nicht gewesen, ihn würde GAUSS sicherlich in seinen D. A. mitgeteilt haben. Andererseits zeigt zwar Nr. 17 T. vom 3. Juli 1796, dass er damals wenigstens schon mit der besonderen ternären Form $x^2+x'^2+x''^2$ sich befasst und für diese gefunden, was später, als er

*) CRELLES Journal f. Mathematik 35 (1847), S. 120; 41 (1850), S. 151.

die Theorie der ternären quadratischen Formen regelrecht durchführte, in art. 280 allgemein von ihm festgestellt worden ist. Da er aber für die Sätze der artt. 288, 289 über die Darstellung von Zahlen durch jene Form erst viel später (April 1798. Nr. 84 T.) den sicheren Boden fand (das betreffende Resultat ist zu art. 288 erforderlich), bleibt die Annahme eines Induktionsschlusses wahrscheinlich, es müsste denn Gauss insbesondere der Darstellbarkeit der Zahlen $8n+3$ irgendwie schon gewiss geworden sein und aus ihr den Fermatschen Satz wie in den D. A. gefolgert haben. Vielleicht findet letztere Meinung eine Stütze in der Bemerkung: »Cap. 5. In demonstratione nostra de connexione discerptionum in $\square\overset{\square}{}\square$ et formarum [Linearformen?] ad formas ubi $a = 8n+3$ respiciendum«, welche nebst mehreren anderen unter der Überschrift: »Inserenda in opere meo de Residuis« (wohl einer frühen oder erst beabsichtigten Niederschrift seiner D. A.) bei Gauss' Auszügen aus den Miscell. Taurin. vol. I—IV zu finden ist. Übrigens liest man auch schon in Gauss' durchschossenem Exemplar von Leiste, *Arithmetik und Algebra* zu S. 68 (W. X 1, S. 78) den Satz »Jede Zahl besteht aus drei Trigonalzahlen« und im Anschluss daran die Angabe, dass jede Zahl von den Formen $8n+1$, $8n+3$, $8n+5$ als Summe von drei, jede Zahl von der Form $8n+7$ als Summe von vier Quadraten darstellbar sei, mit Angabe zugleich von deren Parität oder Imparität.

Ferner gewährte die allgemeine Theorie der ternären Formen die Herleitung der Bedingungen für die Auflösbarkeit der Gleichung

$$ax^2 + a'x'^2 + a''x''^2 = 0,$$

die ebenfalls in Leiste zu S. 111 (W. X 1, S. 86) ausgesprochen sind[*)], sowie eine Methode zur Auflösung der allgemeinen Gleichung zweiten Grades mit zwei Unbestimmten in rationalen Werten der letztern, während ihre ganzzahlige Auflösung schon an früherer Stelle der D. A. (art. 216 sqq.) mittels Zurückführung auf die Darstellung einer ganzen Zahl durch eine binäre Form geleistet worden war. Die Aufgabe, die allgemeine Gleichung

$$ax^2 + a'x'^2 + a''x''^2 + 2bx'x'' + 2b'x''x + 2b''xx' = 0$$

---

*) Diese Bedingungen waren schon früher von Legendre angegeben worden, siehe dessen *Recherches d'Analyse indéterminée*, 3. article, Histoire de l'Académie de Paris (1785) 1788, Mémoires, S. 507.

in ganzen Zahlen zu lösen, findet sich kurz skizziert auch in einem im Juli 1800 begonnenen Notizbüchlein des Nachlasses (Scheda Ac, S. 4, 5, abgedruckt W. X 1, S. 88) behandelt und auf dieselben Prinzipien zurückgeführt, welche Gauss für die Auflösung der genannten einfacheren Gleichung benutzt hat. Es ist dabei bemerkenswert, dass er die Bedingungen für ihre Auflösbarkeit, die aus den für jene einfachere Gleichung geltenden ableitbar und zuerst von H. St. Smith*) bekannt gemacht worden sind, a. a. O. in völliger Übereinstimmung mit dem Letztern ausgedrückt hat.

Noch sei bemerkt, dass aus einer kurzen Notiz des Nachlasses (Ed 3, abgedruckt W. X 1, S. 92) hervorgeht, dass Gauss auch schon quadratische Formen von der Art, die man Hermitesche nennt, betrachtet hat (siehe a. a. O. S. 94). Dort gibt er die Transformation einer Form

$$axx' + bx'y + b'xy' + cyy'$$

mit reellen a, c und konjugiert komplexen b, b', für welche er $\Delta = bb' - ac$ als Determinante benennt, mittels der Substitution

$$\begin{aligned} x &= -u, \quad y = t + mu \\ x' &= -u', \quad y' = t' + m'u', \end{aligned}$$

wobei die akzentuierten Grössen die konjugiert imaginären zu den nicht akzentuierten sind. Eine andere Notiz über »duplicierte quadratische Formen«, in welcher auch schon die kubische Form

$$x^3 + ny^3 + n^2z^3 - 3nxyz$$

auftritt (im Handbuche 18, Bd, vom Oktober 1805, S. 151) deutet durch den dort auftretenden Ausdruck

$$a + b\sqrt{-3}\,.\,x + c\sqrt{-7}\,.\,y + d\sqrt{21}\,.\,xy$$

auf eine Beschäftigung mit den biquadratischen Formen hin, welche Normen komplexer, aus zwei Quadratwurzeln gebildeter Zahlen sind. Dies bestätigt eine Notiz in einem der Gaussschen Handexemplare der D. A., nach welcher jede Primzahl von der Form $8n+1$ als Norm der komplexen Zahl

*) Proceed. of the R. Soc. London 13, S. 110, Papers I, S. 410.

$$\alpha + \beta\sqrt{-1} + \gamma\sqrt{-2} + \delta\sqrt{-1}\sqrt{-2}$$

in der Gestalt

$$p = (\alpha^2 + \beta^2 - 2\gamma^2 - 2\delta^2)^2 + 8(\alpha\gamma + \beta\delta)^2$$

darstellbar sei.

Der sechste Abschnitt der D. A. enthält nur einige Anwendungen des Vorhergehenden teils zur Zerlegung eines Bruchs $\frac{m}{n}$ in sogenannte Partialbrüche, deren Nenner die in n enthaltenen Primzahlpotenzen sind, teils zu seiner Entwicklung in einen periodischen Dezimalbruch und zur Bestimmung der Grösse von dessen Periode aus den Exponenten, zu welchen die Zahl 10 bezüglich jener Potenzen als Moduln gehört; ferner Methoden zur Unterscheidung der Primzahlen von den zusammengesetzten Zahlen und im Zusammenhange damit zur Lösung der Kongruenz $x^2 \equiv A \pmod{M}$, der Gleichung $mx^2 + ny^2 = A$ u. s. w., was alles mehr praktisches als theoretisches Interesse erweckt.

e. Kreisteilung*).

13.

Der Fortgang zum siebenten Abschnitte der D. A. führt uns nun zu Ergebnissen, welche wohl unter Gauss' arithmetischen Entdeckungen das vielseitigste Interesse darbieten. Eigentlich nur eine ganz einfache Anwendung eines elementaren arithmetischen Satzes, sind sie gleichwohl zur Quelle der schönsten zahlentheoretischen Erkenntnisse geworden, ja schliesslich zur Grundlage der stolzesten Gebilde, welche die neuere Zahlentheorie in ihrer Lehre von den Zahlenkörpern und deren Idealen geschaffen hat. Andererseits aber hat eben jene Anwendung die engste Verbindung herbeigeführt zwischen der höheren Arithmetik auf der einen, und der Theorie der algebraischen Gleichungen auf der anderen Seite, und wieder durch die Natur der in Frage kommenden Gleichungen jene Wissenschaft auch als Ursprung tiefliegender Wahrheiten der Geometrie erwiesen, eines Gebietes, das an sich gänzlich ihr

*) Vergl. die einschlägigen Abschnitte der weiter unten folgenden Aufsätze »Über Gauss' algebraische Arbeiten« von K. Hensel und »Gauss als Geometer« von P. Stäckel.

abseits zu liegen schien. Hatte die Lösung der Aufgabe, die Kreisperipherie in eine Anzahl gleicher Teile zu teilen, völlig auf dem Standpunkte beharrt, den sie vor 2000 Jahren schon erreicht und auf dem sie scheinbar sich erschöpft hatte, so lehrte jene arithmetische Anwendung neben den schon bekannten noch mancherlei Teiler kennen, für welche die Aufgabe ebenfalls mit Zirkel und Lineal ausführbar ist, insbesondere die Konstruktion des regelmässigen Siebzehnecks. Wie ein neuer glänzender Stern am Firmamente musste diese Entdeckung Aufsehen erregen, und GAUSS selbst schätzte sie gebührend hoch ein, indem er damit sein *Tagebuch* begann und von seinem am 30. März 1796 (Nr. 1 T.) gefundenen Forschungsresultate in Nr. 66 des Intelligenzblatts der allgemeinen Litteraturzeitung vom 1. Juni 1796 (W. X 1, S. 3) unter dem Datum des 18. April schon vor der Veröffentlichung seiner erst teilweise fertigen Theorie Kenntnis gab.

Wie GAUSS zu seiner Theorie geführt sein mag? Kaum wohl von Seiten der Geometrie, der sein Interesse, will man SARTORIUS v. WALTERSHAUSEN glauben*), in seiner Jugend weniger zugewendet war, wahrscheinlicher durch algebraische Studien, welchen er ohne Zweifel neben seinen arithmetischen schon frühzeitig obgelegen hat und aus denen dann seine Doktorarbeit (1799, W. III, S. 1) hervorgegangen ist. Welche Gleichung höheren Grades konnte ihm näher liegen, als die Gleichung $x^p = 1$, deren Wurzeln dann das Problem der Kreisteilung von selber in den Gesichtskreis zogen! Wie bedeutsam erscheint dabei, dass GAUSS diese einfachere Gleichung jenen andern, durch welche die trigonometrischen Funktionen von $\frac{2\pi}{p}$ selbst bestimmt werden, vorzog, obwohl ihre Wurzeln zu den imaginären Grössen zählen, deren Bürgerrecht in der Wissenschaft damals noch so umstritten war, dass er sie in seiner Doktorarbeit geflissentlich vermied.

Bedenkt man aber, dass in Kap. 6 der A. R. die Theorie der Gleichung $x^p = 1$ erst derjenigen der Kongruenz $x^p \equiv 1$ nachfolgt und dass die Methode zur Auflösung dieser Kongruenz das genaue Vorbild für die Auflösung der Kreisteilungsgleichung ist, so darf man wohl auf den rein arithmetischen Ursprung von GAUSS' Beschäftigung mit der letzteren schliessen. Ist doch das Prinzip seiner Methode von dieser Art. Die Wurzeln jener Gleichung oder

*) *Gauss zum Gedächtniss*, Leipzig 1856, S. 80, 81.

genauer der Gleichung

$$X = \frac{x^p - 1}{x - 1} = 0,$$

die, wenn wir

$$r = \cos\frac{2\pi}{p} + \sqrt{-1}\,\sin\frac{2\pi}{p}$$

setzen, durch die Potenzen $r, r^2, r^3, \ldots, r^{p-1}$ dargestellt sind, zeigen, wenn p als eine ungerade Primzahl vorausgesetzt wird, auf Grund des arithmetischen Satzes, dass die Potenzen $1, g, g^2, \ldots g^{p-2}$ einer primitiven Wurzel g (mod. p) den Resten $1, 2, 3, \ldots, p-1$, von der Ordnung abgesehen, kongruent sind, das eigentümliche Verhalten, dass bei der zyklischen Anordnung $r, r^g, r^{g^2}, \ldots r^{g^{p-2}}$ jede die gleiche rationale Funktion (nämlich die g^{te} Potenz) der vorhergehenden ist. Mit dieser Einsicht war der schöpferische Gedanke gewonnen, aus welchem die ganze Gausssche Theorie der Kreisteilungsgleichung entsprang.

Die Verallgemeinerung der Gaussschen Betrachtung, welche wir Abel verdanken*), liess später die algebraische Auflösbarkeit aller Gleichungen erkennen, deren Wurzeln analoge Eigenschaft zeigen, und eröffnete den Weg zu den bahnbrechenden Ergebnissen von Galois und Kronecker über die algebraische Auflösung der Gleichungen, deren wir uns jetzt erfreuen. Übrigens war sich Gauss selbst schon zur Zeit der D. A. bewusst, dass seine Methode zur Auflösung der Kreisteilungsgleichung viel weiter reiche. Im art. 335 weist er in dieser Hinsicht auf die Funktionen hin, die aus dem Integrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

entspringen und für die Lemniskate gleiche Bedeutung haben, wie die trigonometrischen für den Kreis, und er hat nach den Angaben seines Tagebuchs schon am 19. März 1797 (Nr. 60 T.) die Gleichung untersucht, die zur Teilung der Lemniskate dient, und am 21. desselben Monats (Nr. 62 T.) die Tatsache festgestellt, dass die Fünfteilung auch für diese Kurve geometrisch mittels Zirkel und Lineal ausführbar ist.

---

*) Siehe Crelles Journal für Mathematik 4 (1829), S. 131, Oeuvres, nouvelle édition I, S. 478.

14.

Gauss' Methode beruht nun einerseits auf der Irreduzibilität der Gleichung $X = 0$, für welche er in art. 341 der D. A. den ersten der vielen Beweise gab, die man jetzt dafür kennt; nach Nr. 40 des *Tagebuchs* war er aber erst am 9. Oktober 1796 im Besitze dieses Beweises und hat dann (Nr. 136 T.) am 12. Juni 1808 auch für die Irreduzibilität der Gleichung, welche die primitiven p^{ten} Wurzeln der Einheit bestimmt, falls p eine zusammengesetzte Zahl ist, einen Beweis gehabt. Diese Gleichung selbst sowie einige Grundgedanken des Beweises finden sich in dem im Oktober 1805 begonnenen und über 1808 hinaus fortgeführten Handbuche (18, Bd) des Gaussschen Nachlasses (siehe W. X 1, S. 116); man darf mithin wohl der betreffenden Notiz auch jenes Datum des Tagebuchs beilegen.

Der andere Grundpfeiler seiner Theorie ist die Einteilung der Wurzeln in sogenannte Perioden. Ist $p-1 = e.f$, so erhält man e Perioden von f Gliedern:

$$\eta_i = r^{g^i} + r^{g^{i+e}} + r^{g^{i+2e}} + \cdots + r^{g^{i+(f-1)e}}$$
$$(i = 0, 1, 2, \ldots, e-1).$$

Sie sind die Wurzeln einer Gleichung $X_e = 0$ vom e^{ten} Grade, deren Koeffizienten rationale ganze Zahlen sind, und welcher dieselbe charakteristische Grundeigenschaft zukommt, wie der Gleichung $X = 0$, nämlich dass in der zyklischen Anordnung $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{e-1}$ ihrer Wurzeln jede die gleiche rationale Funktion von der vorhergehenden ist. Diese Gleichung gestattet somit eine entsprechende Behandlung. Zerlegt man die f-gliedrigen Perioden, indem man $e = e'.f'$ setzt, jede in e' Perioden von f' Gliedern, so sind die e' Perioden

$$\eta'_i = r^{g^i} + r^{g^{i+ee'}} + \cdots + r^{g^{i+(f'-1)ee'}},$$
$$(i = 0, 1, 2, \ldots, e'-1)$$

welche die Periode η_0 zusammensetzen, die Wurzeln einer Gleichung $X'_{e'} = 0$ vom Grade e', deren Koeffizienten rational (genauer: linear) durch die f-gliedrigen Perioden ausdrückbar und somit nach Auflösung der Gleichung $X_e = 0$ bekannt sind. Auch diese Gleichung ist von demselben Charakter, wie die

vorigen, und kann daher ebenso behandelt werden, u. s. w. Hiernach kommt, wenn irgendwie

$$p-1 = ee'e'' \ldots e^{(\nu-1)}$$

gesetzt wird, die Auflösung der Kreisteilungsgleichung darauf zurück, der Reihe nach die Hilfsgleichungen

$$X_e = 0,\ X'_{e'} = 0, \ldots, X^{(\nu-1)}_{e^{(\nu-1)}} = 0$$

von den Graden $e, e', \ldots, e^{(\nu-1)}$ aufzulösen. Man erhält die Hilfsgleichungen kleinsten Grades, wenn man $p-1$ als Produkt von Primzahlpotenzen:

$$p-1 = a^{\alpha} b^{\beta} \ldots c^{\gamma}$$

darstellt, und hat dann α Gleichungen vom Grade a, β Gleichungen vom Grade $b, \ldots, \gamma$ Gleichungen vom Grade c zu lösen. Nur in dem Falle $p = 2^{2^k} + 1$ sind alle Hilfsgleichungen quadratisch, die Kreisperipherie also mittels Zirkel und Lineal in p gleiche Teile zerlegbar; in jedem andern Falle tritt mindestens eine Hilfsgleichung höheren Grades auf, und mit gesperrtem Druck ist in art. 365 von GAUSS bemerkt worden, dass sie dann auf keine Weise zu vermeiden oder zu erniedrigen ist (omni rigore demonstrare possumus, has aequationes elevatas nullo modo nec evitari nec ad inferiores reduci posse). Dieser Passus ist offenbar dem Werke noch in letzter Stunde während des Drucks eingefügt worden, da (nach Nr. 116 T.) GAUSS erst am 6. April 1801 zu solcher Gewissheit gelangte, die D. A. aber im Sommer dieses Jahres erschienen, und er zeigt, wie tiefe Blicke GAUSS schon in die algebraische Auflösung der Gleichungen getan haben muss. Der Beweis selbst ist aber weder in den Schriften noch im Nachlasse von GAUSS vorhanden. Das Siebzehneck gehört zu den erstbezeichneten Fällen, ist also mit Zirkel und Lineal konstruierbar; es ist in Übereinstimmung mit der GAUSSschen Theorie zuerst von PAUCKER, dann von ERCHINGER rein geometrisch konstruiert worden*).

---

*) MAGNUS GEORG V. PAUCKER, *Geometrische Verzeichnung des regelmässigen 17-Ecks und 257-Ecks in den Kreis*, Jahresverhandlungen der Kurländischen Gesellschaft für Litteratur und Kunst 2, 1822, S. 160—219; *Die ebene Geometrie der geraden Linie und des Kreises* I, Königsberg 1823, S. 187. Die Abhandlung von JOHANNES ERCHINGER, über die GAUSS 1825 in den Göttingischen gelehrten Anzeigen berichtet hat

15.

Gauss hat aber ferner jede der Hilfsgleichungen auf eine reine Gleichung zurückzuführen gelehrt, indem er sich dazu der Resolvente von Lagrange bediente. Die Verwendung der Resolvente ist in Gauss' *Tagebuch* (Nr. 65, 66 T.) auf den 17. Juli 1797 datiert, denn die dort angegebene deductio secunda ist nichts anderes, als die in art. 360 der D. A. gelehrte Methode, wie aus dem Passus: »quae theoriam secundam aequationum purarum in art. 360 D. A. inchoatam magis illustrant« (W. II, S. 263, Ende von Nr. 18) deutlich hervorgeht, während mit der Notiz Nr. 55 T. vom 19. Januar 1797 die erste Methode der sukzessiven Hilfsgleichungen gemeint sein dürfte.

Übrigens tritt der Gedanke an das Mittel der Resolvente schon früher (am 17. Sept. 1796, Nr. 37 T.) anscheinend selbständig bei Gauss auf, wie er denn auch andere, elementarere Stücke der Lehre von den Gleichungen, wie die Newtonschen Formeln (Nr. 6 T. 23. Mai 1796; Nr. 28 T. 21. Aug. 1796), die nebst ihrer Umkehrung sich in Leiste, *Arithm. u. Algebra* zu S. 6 u. 7 notiert finden (siehe W. X 1, S. 127), und Anderes für die Entwicklung seiner Kreisteilungstheorie sich erst selbst zurechtgelegt zu haben scheint. Setzt man nun, unter R eine primitive e^{te} Einheitswurzel verstehend,

$$[r, R^i] = r + R^i r^g + R^{2i} r^{g^2} + \cdots + R^{(p-2)i} r^{g^{p-2}},$$
$$(i = 1, 2, \ldots, e-1)$$

wofür auch

$$[r, R^i] = \eta_0 + R^i \eta_1 + R^{2i} \eta_2 + \cdots + R^{(e-1)i} \eta_{e-1}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, e-1)$$

geschrieben werden kann, so findet sich

$$[r, R^i]^e = T_i,$$

(siehe W. II, S. 186), ist wie es scheint überhaupt nicht gedruckt worden. Diese Vermutung stützt sich auf eine Bemerkung, die der Tübinger Professor der Rechte Heinrich Schrader in einem an Gauss gerichteten Briefe vom 1. September 1825 macht. Der Brief handelt eingehend von Erchingers Lebensschicksalen und von seinem in Rede stehenden Aufsatz, von dem gesagt wird: »dass er ohne neue Ausarbeitung der äussern Form nach kaum druckreif sein mögte«. Als älteste Konstruktion des regelmässigen Siebzehnecks dürfte die aus dem Jahre 1802 stammende und W. X 1, S. 120 zum ersten Male veröffentlichte des Tübinger Professors der Mathematik Christoph Friedrich v. Pfleiderer anzusehen sein.

wo T_i gleichzeitig mit der Wurzel R als bekannt betrachtet werden kann. Durch Auflösung dieser $e-1$ reinen Gleichungen e^{ten} Grades und mit Zuhilfenahme der Gleichung $[r, 1] = -1$ findet sich dann sogleich

$$\eta_0 = \frac{1}{e}(-1 + \sqrt[e]{T_1} + \sqrt[e]{T_2} + \cdots + \sqrt[e]{T_{e-1}}),$$

d. i. die Auflösung der Gleichung $X_e = 0$, und ähnlicherweise werden die übrigen Hilfsgleichungen gelöst. Die allzugrosse Vieldeutigkeit dieser Formel beschränkt man auf das zutreffende Mass, wenn man beachtet, dass allgemein auch der Ausdruck

$$[r, R^i] . [r, R]^{e-i} = T^{(i)}$$

eine bekannte Grösse ist, sodass die vorige Formel auch in die Gestalt

$$\eta_0 = \frac{1}{e}\left(-1 + \sqrt[e]{T_1} + \frac{T^{(2)}}{T_1} \cdot (\sqrt[e]{T_1})^2 + \cdots + \frac{T^{(e-1)}}{T_1} \cdot (\sqrt[e]{T_1})^{e-1}\right)$$

gesetzt werden kann, aus welcher dann die übrigen Perioden $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{e-1}$ hervorgehen, wenn der einen noch auftretenden Wurzel ihre sämtlichen Werte beigelegt werden. Nur irrtümlicherweise konnte, wie GAUSS bemerkt hat (W. II, S. 249), LAGRANGE*) die erstere Formel als die vorzüglichere bezeichnen. Der hierbei auftretende Zweifel, ob $T_1 = [r, R]$ auch nicht Null sei, kann, wie schon GAUSS bemerkt, aber nicht weiter bewiesen hat, behoben werden. Auch gab schon GAUSS (W. II, S. 252) in einer Abhandlung, welche aus dem Jahre 1808 stammt (W. II, S. 265, Bemerkungen), den später von JACOBI u. A. hergeleiteten Summen-Ausdruck für den Quotienten

$$\frac{[r, R^i] . [r, R^k]}{[r, R^{i+k}]},$$

insbesondere auch die Formel

$$[r, R^i] . [r, R^{-i}] = (-1)^i . p$$

und zeigte (W. II, S. 250), dass zur Bestimmung von $\sqrt[e]{T_1}$ bei Hinzunahme der e^{ten} Einheitswurzeln, d. h. neben der Teilung der ganzen Peripherie in e gleiche Teile, die Teilung eines gegebenen Winkels in ebensoviel gleiche Teile

*) *Traité de la résolution des équations numériques*, 2. éd, 1808, Note XIV, art. 41, Oeuvres VIII, S. 367.

nebst der Ausziehung der Quadratwurzel aus einer bekannten Grösse genügt. Insonderheit erfordert die Auflösung der Kreisteilungsgleichung $X = 0$ selbst, d. h. die Teilung des Kreises in p gleiche Teile, nur die Teilung des Kreises und die eines dann gegebenen Winkels in $p-1$ gleiche Teile nebst der Ausziehung der Quadratwurzel aus einer bekannten Grösse, nämlich aus p.

Die Wurzeln von $X = 0$, welche einer der f-gliedrigen Perioden η_i angehören, sind Wurzeln einer anderen Gleichung vom Grade f, deren Koeffizienten linear durch die Perioden η_i ausdrückbar sind. Daher zerfällt, wenn die letzteren bekannt geworden sind, der Ausdruck X in e Faktoren f^{ten} Grades mit rational bekannten Koeffizienten. Als Gleichung für die zwei $\frac{p-1}{2}$-gliedrigen Perioden fand GAUSS die folgende:

$$x^2 + x + \tfrac{1}{2}\left(1 - (-1)^{\frac{p-1}{2}} p\right) = 0$$

und die zugehörige Zerlegung

$$4X = Y^2 - (-1)^{\frac{p-1}{2}} pZ^2,$$

wo Y, Z ganze ganzzahlige Funktionen von x sind. Auf jener Gleichung beruhen die beiden Beweise des Reziprozitätsgesetzes, welche die A. R. (W. II, S. 234) enthält; den GAUSSschen Tagebuchnotizen zufolge (s. Nr. 30 T.) muss sie ihm also schon vor dem 2. September 1796 bekannt gewesen sein. Der Herleitung dieser Gleichung entnahm er aber auch (D. A. art. 356) einen neuen Beweis für den quadratischen Charakter $\left(\frac{-1}{p}\right)$ und ward hier schon auf die sogenannten GAUSSschen Summen geführt, die uns noch nachher beschäftigen werden. Desgleichen fand er am 1. Oktober 1796 zunächst durch Induktion (Nr. 39 T.) die Gleichung für die drei $\frac{p-1}{3}$-gliedrigen Perioden*) und versah sie (Nr. 67 T.) dann am 20. Juli 1797 mit dem Beweise, welchen art. 358 der D. A. enthält und in dessen Verlaufe nebenbei die Zerlegung

---

*) Diese Gleichung, auf deren Aufsuchung schon anderweitige Notizen, wie die in LEISTE, *Arithm. u. Algebra* zu S. 8 und in HELLWIG, *Anfangsgründe der Mathematik* (siehe W. X 1, S. 111) deuten, wird in einer in LAMBERTS *Tabellen* bei S. 223 befindlichen Aufzeichnung von GAUSS unter der Form

$$z^3 - 3pz - p(9a - p - 1) = 0$$

gegeben, wobei

$$4p = 3N^2 + (9a - p - 1)^2.$$

$4p = x^2 + 27y^2$ für die Primzahlen von der Form $p = 6n + 1$ gefunden wird; nach Nr. 135 des *Tagebuchs* hat er diesen Beweis am 10. Mai 1808 auf wesentlich einfachere Grundsätze zurückgeführt, ohne jedoch letztere näher zu bezeichnen. Ebensowenig findet sich in seinen Schriften die Zerlegung von X in vier den Wurzeln der $\frac{p-1}{4}$-gliedrigen Perioden entsprechende Faktoren, die er (nach Nr. 128 T.) im Jahre 1806 noch ausgeführt hat. Nur die Hilfsmittel zur Bildung der dazu erforderlichen Hilfsgleichung vierten Grades liegen in den Betrachtungen der artt. 15—20 der ersten Abhandlung über die biquadratischen Reste bereit, mit denen sie, wie GAUSS selbst in art. 22 dort angemerkt hat, aufs engste verbunden ist.

Aus den in dieser Skizze angegebenen Daten ist ersichtlich, dass zur Zeit, als GAUSS seine Entdeckung bezüglich des Siebzehnecks bekannt gab, also im Juni 1796, ihm, wie er selbst dabei ausgesagt hat, zu einer vollständigen, logisch festgefügten Theorie der Kreisteilung doch noch eine ganze Reihe wesentlicher Sätze fehlte. Kaum wird man daher fehl gehen, wenn man jene Entdeckung als einen glücklichen Wurf, weniger als Ergebnis denn als Quelle der allgemeinen Methode betrachtet. In der Tat schreibt GAUSS am 6. Januar 1819 an GERLING (siehe W. X 1, S. 125), dass ihm schon in seinem ersten Semester alles, was sich auf die Verteilung der Wurzeln in zwei Perioden bezieht, bekannt gewesen sei, aber erst am frühen Morgen des 29. März 1796 sei es ihm geglückt, den Zusammenhang der Wurzeln unter einander, d. i. das arithmetische Prinzip ihrer zyklischen Anordnung zu erkennen; und nun führte ihn bei der Siebzehnteilung die wiederholte Zweiteilung der Perioden nicht nur zum glücklichen Ziele, sondern auch zur Erkenntnis der allgemeinen Methode, deren Erfolg er sicher genug übersah, um ungeachtet der noch vorhandenen Lücken die oben erwähnte Anzeige wagen zu können.

II. Gauss' arithmetische Abhandlungen und Nachlass.

a. Die Analysis Residuorum.

16.

An die D. A. fügen wir nun naturgemäss die Betrachtungen der A. R., deren weitere Ausführung Gauss als Fortsetzung der D. A. geplant hatte. Im ersten Teile der A. R. (W. II, S. 199—211) wird die Lösung der binomischen Kongruenz $x^n \equiv 1$ in Bezug auf einen Primzahlmodul p gelehrt. Man darf n als Teiler von $p-1$ und als eine Primzahlpotenz voraussetzen; ist $\varphi(n) = a^\alpha b^\beta \ldots$, so kommt die Auflösung der Kongruenz auf α Kongruenzen vom Grade a, β Kongruenzen vom Grade $b, \ldots$ zurück. Dies zeigt sich für eine Primzahl n in ganz entsprechender Weise wie bei der Gleichung $x^n = 1$. Sei r primitive Wurzel von

$$x^n \equiv 1 \pmod{p},$$

ρ primitive Wurzel von

$$x^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$$

und $\varphi(n) = e.f$, und bildet man die Perioden

$$\eta_i = r^{\rho^i} + r^{\rho^{e+i}} + r^{\rho^{2e+i}} + \cdots + r^{\rho^{(f-1)e+i}},$$
$$(i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ e-1)$$

so ist

$$\eta_i \eta_k \equiv C + m_0 \eta_0 + \cdots + m_{e-1} \eta_{e-1} \pmod{p},$$

wo C und die m ganze Zahlen bedeuten. Setzt man ferner $e = e'f'$ und zerlegt η_i in kleinere Perioden

$$\eta_i = \eta'_{0i} + \eta'_{1i} + \cdots + \eta'_{e'-1,i},$$

so ist die Summe

$$\eta'_{0h} \cdot \eta'_{0k} + \eta'_{1h} \cdot \eta'_{1k} + \cdots + \eta'_{e'-1,h} \cdot \eta'_{e'-1,k}$$

eine lineare Funktion von den η_i. Daher kann man, wenn die letzteren bekannt sind, die Potenzsummen

$$\eta_{0i}^{lm} + \eta_{1i}^{lm} + \cdots \eta_{le-1,i}^{lm}$$

bilden und mittels ihrer eine Kongruenz, deren Wurzeln die kleineren Perioden sind. Die Fortsetzung dieses Verfahrens führt das obgenannte Ergebnis herbei. Dabei ist zu beachten, dass aus einer Periode η_0 die übrigen mittels linearer Kongruenzen von der Gestalt

$$\eta_0^h \equiv C_h + m_0^{(h)}\eta_0 + m_1^{(h)}\eta_1 + \cdots + m_{e-1}^{(h)}\eta_{e-1}$$
$$(h = 0, 1, 2, \ldots, e-1)$$

bestimmt werden können, vorausgesetzt, dass die Determinante dieser Kongruenzen nicht durch p teilbar ist. Die hier bleibende Lücke hat GAUSS, wenn seine Tagebuchnotiz vom 21. Juli 1797 (Nr. 68 T.) hierauf zu beziehen ist, zu ergänzen gewusst, indem er die Theorie der Kongruenzen zu Hilfe zog, die in Bezug auf einen Primzahlpotenzmodul gedacht werden; in welcher Weise aber, das tritt nicht zu Tage.

Von der besonderen Kongruenz $x^n \equiv 1$ wendet sich GAUSS (W. II, S. 212—242) allgemein zur Betrachtung der Kongruenzen höheren Grades

$$F(x) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Da die Aufgabe, eine Wurzel einer solchen zu finden, nur ein spezieller Fall der allgemeinen ist, die Funktion $F(x)$ (mod. p) in ihre einfachsten Faktoren zu zerlegen, so sieht man sich zu Untersuchungen geführt, welche denjenigen der Theorie der rationalen ganzen Zahlen völlig analog sind, indem die ganzen Funktionen $F(x)$ an Stelle der letzteren treten. In solcher Analogie ist später die Theorie systematisch von DEDEKIND*) entwickelt worden, nachdem schon früher SCHÖNEMANN**) sie auf anderen Grundlagen aufgebaut hatte.

GAUSS' Darstellung derselben nimmt mehr DEDEKINDS Weg und liefert bereits die grösste Anzahl der allgemeinen Sätze, zu denen Dieser gelangt ist. Nach Definition der Teilbarkeit einer Funktion $F(x)$ (mod. p) treten die Primfunktionen als Grundelemente hervor, in die jede andere Funktion eindeutig zerlegbar ist; für relative Primfunktionen $A(x)$, $B(x)$ lassen sich andere Funk-

*) CRELLES Journal für Mathematik **54** (1857), S. 1.

) CRELLES Journal für Mathematik **31 (1846), S. 269; **32** (1846), S. 93.

tionen $C(x)$, $D(x)$ finden derart, dass

$$A(x) . C(x) + B(x) . D(x) \equiv 1 \pmod{p}$$

(s. die Notiz vom 19. Aug. 1796, Nr. 27 T.). Die Anzahl der inkrongruenten Funktionen m^{ten} Grades (mod. p) ist p^m. Die Anzahl (m) der inkongruenten Primfunktionen m^{ten} Grades hat GAUSS (am 26. Aug. 1797, Nr. 75 T.) sehr einfach auf analytischem Wege mittels einer sie erzeugenden Funktion bestimmt, nachdem er sie früher auf zwei andern Wegen, deren einer in der Handschrift der A. R. mitgeteilt ist, umständlicher erhalten hatte, und hat so die Formel gefunden

$$p^m = \sum d . (d),$$

in welcher die Summe auf alle Teiler d von m sich erstreckt und aus deren Umkehrung (m) sich ergibt, eine Formel, welche, wenn m als Primzahl gedacht wird, einen neuen Beweis des FERMATschen Satzes herbeiführt.

17.

Die Beantwortung der Frage nun nach den Teilern einer Funktion (mod. p), das Grundproblem der Lehre von den Kongruenzen, welche in Bezug auf einen Doppelmodul oder — in KRONECKERscher Ausdrucksweise — in Bezug auf ein Modulsystem zweiter Stufe gedacht werden, gründet sich bei GAUSS auf eine Reihe von Hilfssätzen. Einerseits lehrt er für eine Gleichung $P(x) = 0$ die andere Gleichung $P_p(x) = 0$ bilden, welche zu Wurzeln die p^{ten} Potenzen von den Wurzeln der ersteren hat, und den (am 18. Aug. 1796, Nr. 26 T.) von ihm gefundenen Satz, dass $P_p(x) \equiv P(x) \pmod{p}$ sei, wenn p eine Primzahl. Andererseits zeigt er, dass es für jede von x verschiedene Funktion $P(x)$ einen kleinsten Exponenten ν gibt, für welchen $x^\nu - 1 \pmod{p}$ durch $P(x)$ teilbar ist; und ν ist ein Teiler von $p^m - 1$, falls $P(x)$ Primfunktion vom Grade m. Jede solche teilt also (mod. p) die Funktion $x^{p^m-1} - 1$; z. B. teilt jede von x verschiedene Primfunktion ersten Grades den Ausdruck $x^{p-1} - 1$, womit aufs Neue wieder der FERMATsche Satz bewiesen ist.

Aus diesen Ergebnissen folgt auf der einen Seite, dass $x^{p^m-1} - 1 \pmod{p}$ dem Produkte aller inkongruenten von x verschiedenen Primfunktionen kon-

gruent ist, deren Grade Teiler von m sind; auf der andern kann $x^\nu - 1$ nur solche primitive d. h. in keinem ähnlichen Ausdrucke geringeren Grades aufgehende Primteiler (mod. p) haben, deren Grad m den Exponenten bezeichnet, zu welchem p (mod. ν) gehört, derart, dass $p^m \equiv 1$ (mod. ν) (Nr. 30 T.). Auf solcher Grundlage kann nun für jede Funktion $x^\nu - 1$ nicht nur die Anzahl ihrer Primteiler eines bestimmten Grades ermittelt (art. 360, W. II, S. 230), sondern auch eine Methode gegeben werden, ihre (primitiven) Primteiler selbst zu finden. Dazu dient der am 30./31. August 1797 (Nr. 76, 77 T.) von Gauss erzielte Satz, dass jede ganze symmetrische Funktion der Grössen

$$x, x^p, x^{p^2}, \ldots, x^{p^{m-1}}$$

in Bezug auf den Doppelmodul $p, P(x)$, wenn $P(x)$ eine Primfunktion m^{ten} Grades bezeichnet, einer ganzen Zahl und die Koeffizienten von $P(x)$ den elementaren symmetrischen Funktionen jener Potenzen kongruent sind; andererseits die Einteilung der Potenzen $x^\alpha, x^\beta, \ldots$, wo $\alpha, \beta, \ldots$ die zu ν teilerfremden Zahlen $< \nu$ bezeichnen, in Perioden, ähnlich den Perioden der Kreisteilungsgleichung, welche durch Kongruenzen bestimmt werden, die (mod. p) auflösbar sind, solange die Perioden noch aus solchen von der Gestalt

$$x^k + x^{kp} + x^{kp^2} + \cdots + x^{kp^{m-1}}$$

zusammengesetzt sind.

Schon viel früher hatte Gauss den Zusammenhang dieser Untersuchungen mit dem Fundamentaltheoreme erkannt (13. Aug. 1796, Nr. 23 T.); in der Tat führte ihn am 2. September 1796 (Nr. 30 T.) die Anwendung seiner Methoden auf den Fall, wo ν eine ungerade Primzahl ist, zu zwei neuen Beweisen jenes Gesetzes, deren zweiter gewissermassen den umgekehrten Gang nimmt wie der erste. Zweifelsohne vor dem letztangegebenen Tag datiert eine Notiz in Gauss' Nachlass (Ea 5, abgedruckt W. X 1, S. 114), in welcher er bezüglich der Gleichung, deren Wurzeln die e Perioden von f Gliedern p^{ter} Einheitswurzeln sind, unter der Überschrift »der goldene Lehrsatz« den Satz unterstreicht: »diese Gleichung ist möglich für jeden Primmodulus $= \sqrt[f]{1}$ (Mod. p)« d. h. welcher zum Exponenten f (mod. p) gehört, ein Satz, der als ein Theorema generale demonstrandum schon im Leiste bei Seite 108 (W. X 1, S. 115) aufgezeichnet ist. Die Quelle, aus der die genannten zwei Beweise des Rezi-

prozitätsgesetzes fliessen, ist nur ein Spezialfall dieses allgemeinen Satzes, und so erklärt es sich, dass GAUSS in seinem *Tagebuche* am 27. Juni 1796 (Nr. 16 T.) den Ausdruck Theorema aureum auch für das Fundamentaltheorem verwendet.

Die A. R. schliesst mit einigen Sätzen ab, mit denen GAUSS begonnen hat, die Theorie der Zerlegung der Funktionen auf den Fall auszudehnen, wo der Modul eine Primzahlpotenz oder allgemeiner eine beliebig zusammengesetzte Zahl ist (Nr. 77, 78 T. Ende August 1797), und diese Fälle auf den einfacheren eines Primzahlmoduls zurückzuführen (9. Sept. 1797, Nr. 79 T.). Hierin scheint er die Hilfsmittel gefunden zu haben, gewisse Schwierigkeiten, die jener einfachere Fall noch bot, zu beheben (s. art. 251, W. II, S. 209; art. 363 Ende, W. II, S. 232).

b. Die späteren Beweise des Fundamentaltheorems (1808—1818).

18.

Nach den D. A. veröffentlichte GAUSS zunächst die drei Abhandlungen: *Theorematis arithmetici demonstratio nova* (Comm. Gotting. 16, 1808, vorgelegt 15. Januar); *Summatio quarundam serierum singularium* (Comm. Gotting. rec. **1**, 1811, vorgelegt am 24. Aug. 1808); *Theorematis fundamentalis in doctrina de residuis quadraticis demonstrationes et ampliationes novae* (ebendas. **4**, 1818, vorgelegt am 10. Febr. 1817). Sie enthalten vier neue Beweise des Fundamentaltheorems. Die zweite von ihnen ist, wie die *Disquisitionum circa aequationes puras ulterior evolutio*, deren Fortsetzung sie ursprünglich zu bilden bestimmt war (s. W. II, S. 265, Bemerkungen), unmittelbar aus der Kreisteilung hervorgegangen. Dort finden sich im art. 356 der D. A. bereits die sogenannten GAUSSschen Summen, denen man zusammenfassend die Gestalt

$$W_q = \sum_{i=0}^{n-1} r^{qi^2}$$

geben kann, wo

$$r = \cos\frac{2\pi}{n} + \sqrt{-1}\,\sin\frac{2\pi}{n}$$

gesetzt ist, und deren Wert für den Fall einer ungeraden Primzahl n, bis auf das Vorzeichen einer Quadratwurzel genau, dort angegeben ist. Auch

ohne dieses letztere zu bestimmen, erkannte GAUSS hier schon Mitte Mai 1801 (Nr. 118 T.) einen neuen Weg zum Beweise des Reziprozitätsgesetzes. Aber die Bestimmung des Vorzeichens selbst gestaltete sich zu einer ebenso reizvollen wie schwierigen Aufgabe, die zu bewältigen vier Jahre erforderlich waren. An mehreren Stellen (W. II, S. 16, 156; Nr. 123 T.), mit besonderer Lebhaftigkeit aber in einem Briefe an OLBERS vom September 1805 (W. X 1, S. 25) hat GAUSS die Mühen geschildert, die ihm aus jener Aufgabe erwuchsen, bis ihm endlich — wie der Blitz einschlägt und ohne dass er sagen könne, wodurch — der befreiende Gedanke kam (30. August 1805, Nr. 123 T.). Die Lösung beruht einerseits auf der Umformung der Summe W_q in ein Produkt, andererseits auf den Eigenschaften der beiden eigentümlich gebauten Reihen

$$f(x, m) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i . (m, i), \quad F(x, m) = \sum_{i=0}^{\infty} x^{\frac{i}{2}} . (m, i),$$

wo

$$(m, i) = \frac{(1-x^m)(1-x^{m-1})\dots(1-x^{m-i+1})}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^i)},$$

und deren jede geeignet ist, jene Umformung zu leisten. Aus ihren Eigenschaften entspringt u. a. die für die additive Zahlentheorie bedeutsame Formel

$$\prod_{i=1}^{\infty} \frac{1-x^{2i}}{1-x^{2i-1}} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} x^{\frac{i(i-1)}{2}},$$

sowie für den Fall eines ungeraden n die Gleichung

$$W_q = (r^q - r^{-q})(r^{2q} - r^{-2q}) \dots (r^{(n-2)q} - r^{-(n-2)q})$$

und hieraus für ein ungerades n

$$W_1 = +\sqrt{(-1)^{\frac{n-1}{2}} . n},$$

während $W_1 = +(1+i)\sqrt{n}$ oder gleich Null ist, jenachdem $n \equiv 0$ oder $n \equiv 2$ (mod. 4). Ferner folgt, wenn n eine ungerade Primzahl ist, allgemein

$$W_q = \left(\frac{q}{n}\right) \cdot \sqrt{(-1)^{\frac{n-1}{2}} . n}.$$

Ist aber $n = abc\ldots$ ein Produkt verschiedener ungerader Primzahlen, so besteht die Beziehung

$$W_1 = \prod_{a,b,c,\ldots} \left(1 + r^{\frac{n^2}{a^2}} + r^{4\frac{n^2}{a^2}} + \cdots + r^{(a-1)^2\frac{n^2}{a^2}}\right),$$

aus welcher folgender Satz hervorgeht: Die Anzahl der $a, b, c, \ldots$, von denen bezw. $\frac{n}{a}, \frac{n}{b}, \frac{n}{c}, \ldots$ Nichtreste sind, ist gerade oder ungerade, je nachdem die Anzahl ν der Zahlen $a, b, c, \ldots$ welche die Form $4\mu + 3$ haben, kongruent 0,1 oder 2,3 (mod. 4) ist. Wird n als Produkt von nur zwei solchen Primzahlen gedacht, so folgt hieraus das Reziprozitätsgesetz. Ähnliche Betrachtungen ergeben auch die beiden Ergänzungssätze.

Im Anfang seiner Abhandlung bezeichnet GAUSS die Summen W_q als eine reiche Quelle für Untersuchungen, deren Darstellung er für eine andere Stelle verheisst. Ob GAUSS hier Beziehungen dieser Summen zu den Θ-Reihen gemeint habe, die nach aufgefundenen Stellen des Nachlasses*) ihm nicht unbekannt geblieben sind, stehe dahin. Wahrscheinlicher ist hier die mit art. 19 beginnende, aber schnell abbrechende Fortsetzung der *Disquisitionum circa aequationes puras ulterior evolutio* (W. II, S. 263—65) gemeint, möglicherweise aber auch der zweite der beiden Beweise des Fundamentaltheorems, welche die dritte der oben genannten Abhandlungen enthält. Auch er entstammt der Kreisteilung, ist aber von GAUSS in einer Form dargestellt, die ihn der Theorie der höheren Kongruenzen näher bringt. Bedeutet g eine primitive Wurzel für die ungerade Primzahl p und ξ den Ausdruck

$$x - x^g + x^{g^2} - \cdots - x^{g^{p-2}},$$

so lässt sich zeigen, dass $\xi^2 - (-1)^{\frac{p-1}{2}}.p$, also auch, wenn q eine andere ungerade Primzahl bedeutet,

$$\xi^{q-1} - (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}.p^{\frac{q-1}{2}}$$

durch $\frac{1-x^p}{1-x}$ teilbar ist, desgleichen

*) Siehe insbesondere W. III, S. 433 ff. und die Nachträge zur Analysis in W. X 1, S. 145 ff.; vergl. auch den weiter unten folgenden Aufsatz »Über GAUSS' Arbeiten zur Funktionentheorie« von L. SCHLESINGER.

$$x^q - x^{qg} + x^{qg^2} - \dots - x^{qg^{p-2}} - \left(\frac{q}{p}\right) \cdot \xi.$$

Durch Verbindung dieser Umstände mit der Kongruenz

$$x^q - x^{qg} + x^{qg^2} - \dots - x^{qg^{p-2}} \equiv \xi^q \pmod{q}$$

wird man einfach zum Reziprozitätsgesetze geführt.

19.

Auf wesentlich anderer, ganz elementarer Grundlage beruhen die beiden andern Beweise des Reziprozitätsgesetzes. Wie GAUSS (W. II. S. 50, 161) aussagt, sind sie den Bemühungen zu danken, die er aufwandte, um den analogen Sätzen der Lehre von den kubischen und biquadratischen Resten beizukommen. Einmutlich führte ihn die hierbei sich darbietende Einteilung der Reste nach einem gegebenen Modul in Drittel resp. Viertel ihrer Gesamtanzahl zur Verteilung der absolut kleinsten Reste (mod. p) in die beiden Hälften, welche positiv und welche negativ sind, und die Verbindung mit dem EULERschen Kriterium zu dem wichtigen Satze, der als GAUSSsches Lemma benannt wird und wie folgt lautet: Ist (q, p) die Anzahl der Zahlen

$$q, 2q, 3q, \dots, \frac{p-1}{2} q,$$

deren absolut kleinste Reste (mod. p) negativ sind, so ist

$$q^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^{(q,p)} \pmod{p}.$$

Die Ermittlung der von GAUSS mit dem Namen »Dezident« belegten Zahl (q, p) geschieht nun bei dem ersten der erwähnten Beweise (in der Abhandlung vom Januar 1808) mit Hilfe der an dieser Stelle von GAUSS eingeführten Funktion $[x]$, welche die grösste ganze Zahl bezeichnet, die nicht grösser als x ist, eine Funktion, die seitdem in Arbeiten von KRONECKER und jüngeren Mathematikern zu den mannigfaltigsten Untersuchungen Anlass gegeben hat. GAUSS' Betrachtung beruht im wesentlichen auf der Bestimmung des »Dezidenten« durch die Beziehung

$$(q, p) = \sum_i \left[\frac{2iq}{p}\right] - 2 \cdot \sum_i \left[\frac{iq}{p}\right],$$

wo $i = 1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}$, sowie auf der durch die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{n} [ix] + \sum_{k=1}^{[nx]} \left[\frac{k}{x}\right] = n \,.\, [nx]$$

ausgedrückten Eigenschaft der gedachten Funktion. Mit ihrer Hilfe lässt sich nachweisen, dass jeder der Ausdrücke

$$L = (q, p) + \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} \left[\frac{iq}{p}\right], \quad M = (p, q) + \sum_{k=1}^{\frac{q-1}{2}} \left[\frac{kp}{q}\right]$$

einer geraden Zahl gleich, und dass

$$L + M = (q, p) + (p, q) + \frac{(p-1)(q-1)}{4}$$

ist, woraus sich dann das Reziprozitätsgesetz sogleich ergibt.

Auf dasselbe Gausssche Lemma begründet, findet der zweite jener Beweise (in der Abhandlung vom Jahre 1818) die Beziehung zwischen den beiden Dezidenten (p, q), (q, p), welche das Gesetz bedingt, durch eine Verteilung der Zahlen $\gamma = 1, 2, 3, \ldots, \frac{pq-1}{2}$ in acht Gruppen je nach den Vorzeichen von $\Re\left(\frac{\gamma}{p}\right)$, $\Re\left(\frac{\gamma}{q}\right)$, wo $\Re(x)$ das Kroneckersche Zeichen für den Unterschied zwischen x und der nächstgelegenen ganzen Zahl bedeutet, und durch die Beziehungen, welche zwischen den Anzahlen der in diesen einzelnen Gruppen vorhandenen Zahlen bestehen und aus denen sich erschliessen lässt, dass von den drei Zahlen (p, q), (q, p), $\frac{(p-1)(q-1)}{4}$ entweder nur eine oder alle drei gerade sind.

An diese Beweise schliesst sich endlich ein einfacher Algorithmus, durch welchen der quadratische Charakter einer Zahl bezüglich einer andern bestimmt werden kann. Er beruht auf dem Euklidischen Algorithmus und auf der Gleichung

$$\varphi(a, b) + \varphi(b, a) = a' \,.\, b',$$

in welcher $a' = \left[\frac{a}{2}\right]$, $b' = \left[\frac{b}{2}\right]$ und

$$\varphi(a, b) = \sum_{i=1}^{a'} \left[\frac{ib}{a}\right]$$

ist.

20.

Werfen wir noch einen Blick auf die Chronologie der acht Gaussschen Beweise für das Fundamentaltheorem. Datieren wir sie nach der Zeit ihrer Veröffentlichung, und zählen sie, wie es Gauss in seinen Publikationen tut, dementsprechend, so ist

Beweis I (D. A. art. 135 sqq, W. I, S. 104)	vom Jahre	1801
„ II (ebendas. art. 262, W. I, S. 292)	„ „	1801
„ III (Comm. Gotting. **16**, W. II, S. 1)	„ „	1808
„ IV (Comm. Gott. rec. **1**, W. II, S. 9)	„ „	1811
„ V u. VI (Comm. Gott. rec. **4**, W. II, S. 47)	„ „	1818
„ VII u. VIII (Nachlass, W. II, S. 234)	„ „	1863.

Von diesen Beweisen ist I der zeitlich erste und am 8. April 1796 (Nr. 2 T.) von Gauss gefunden; Beweis II ist der zweite, am 27. Juni 1796 (Nr. 16 T.) gefunden, die Beweise VII und VIII, die im Grunde nur einen vollen Beweis bilden, sind spätestens am 2. September 1796 (Nr. 30 T.) von Gauss erhalten und in seinem Nachlass als dritter und vierter (W. II, S. 234) ausdrücklich bezeichnet. Der Beweis IV ist schon Mitte Mai 1801 (Nr. 118 T.) von Gauss gefunden und dort als fünfter gezählt worden. Die übrigen Beweise entstammen, wie bemerkt, nach seiner eigenen Aussage seinen Bemühungen um die kubischen und biquadratischen Reste, die erst 1805 einsetzten; sicherlich ist die in Nr. 134 T. auf den 6. Mai 1807 datierte »demonstratio principiis omnino elementaribus innixa« der Beweis III. Ein Anfang desselben, insbesondere die oben angegebene Formel für den Dezidenten (q, p) findet sich schon im Handbuche (18, Bd) vom Oktober 1805 des Gaussschen Nachlasses S. 164 (abgedruckt W. X 1, S. 26) vor der Notiz über den Beweis der Irreduzibilität der allgemeinen Kreisteilungsgleichung, also vor dem 12. Juni 1808.

In einem andern im September 1813 begonnenen Handbuche (21, Bg) steht S. 6—8 ein Aufsatz mit dem Titel »*Dritter Beweis des Fundamentaltheorems bei den quadratischen Resten in einer neuen Einkleidung*« und mit dem Datum Novb. 12, jedenfalls 1813 (abgedruckt W. X 1, S. 33), der mit den Worten endigt: »Bei dieser Einkleidung des Beweises ist der wahre Nerf desselben mehr in die Augen fallend als bei derjenigen, in welcher er in den Göttingischen Commentationen Bd. XVI erscheint«. Da dieser Aufsatz im Prinzip

mit dem Beweise V identisch und, nur in der Entwicklung desselben von ihm abweichend, eine blosse Modifikation desselben ist, so ist ersichtlich auch Beweis V erst durch eine vereinfachende Neubearbeitung aus Beweis III hervorgegangen, also später als dieser. Da aber (W. II, S. 50) die Beweise V und VI als die vor neun Jahren versprochenen, nämlich (W. II, S. 43) als die bei Veröffentlichung von Beweis IV (24. August 1808) schon vorhandenen Beweise bezeichnet werden, so muss Beweis V zwischen dem 6. Mai 1807 und dem 24. August 1808 entstanden sein. Im *Tagebuch* geschieht seiner keine Erwähnung, ebensowenig des Beweises VI, dessen Datierung am unsichersten bleibt.

Beim Beweise III (W. II, S. 4) und in der Anzeige desselben (W. II, S. 153) erwähnt Gauss drei Beweise, die er nach dem Beweise I gefunden und welche »sehr tiefliegende und ihrem Inhalte nach ganz heterogene Untersuchungen voraussetzen«; einer davon sei der Beweis II. Von den beiden übrigen ist unter dem einen zweifelsohne der Beweis IV gemeint; der andere kann Beweis V nicht sein, der, wie gesagt, später als Beweis III ist, und auf welchen die erwähnte Charakterisierung nicht passt. Es bleibt also nur die Wahl zwischen dem Doppelbeweise der A. R. (der demonstratio tertia und quarta, welche eigentlich erst zusammen eine einzige »demonstratio completa« ausmachen) und dem — ihm übrigens nahestehenden — Beweise VI, und man möchte sich Kronecker entgegen für den erstern entscheiden, da es wunderbar scheinen muss, dass Gauss diesen mit Stillschweigen übergangen haben sollte. Jenachdem man nun sein Zitat auf den Beweis VI bezieht oder nicht, würde dieser Beweis vor Beweis III d. i. vor den 6. Mai 1807 oder, wie Beweis V, zwischen diesen Zeitpunkt und den 24. August 1808 zu datieren sein; ob dann vor den Beweis V oder nach denselben, muss dahingestellt bleiben.

Der deutschen Darstellung des Beweises V geht in dem Handbuche (21, Bg) vom September 1813 auf S. 4, 5 auch eine (im wesentlichen mit der lateinischen übereinstimmende) deutsche Darstellung des Beweises VI vorauf (abgedruckt W. X 1, S. 28), die als fünfter Beweis gezählt wird, umgekehrt wie in den Commentationen, wo er dem Beweise V folgt und als Demonstratio sexta bezeichnet wird. Da die lateinischen Fassungen dieser Beweise in den Comm. Gott. rec. 4 von Gauss erst 1817 der Öffentlichkeit übergeben

sind, möchte man annehmen, dass die deutschen Darstellungen die ursprüngliche Fassung der schon 1808 vorhanden gewesenen Beweise wiedergeben. Der Algorithmus zur Bestimmung des quadratischen Charakters einer Zahl B in bezug auf eine andere A, mit welchem die dritte Abhandlung schliesst, kann hinwiederum nicht wohl vor dem August 1808 gefunden sein, da er in dem Handbuche vom Oktober 1805 erst S. 213 nach astronomischen Beobachtungen von jenem Datum aufgeführt wird.

c. Kubische und biquadratische Reste. Komplexe ganze Zahlen.

21.

Wie gesagt, sind die letzten Beweise des Reziprozitätsgesetzes zumeist durch die Untersuchungen hervorgerufen, welche GAUSS über kubische und biquadratische Reste unternahm, Untersuchungen, zu denen überzugehen für ihn nahe lag, nachdem er die Theorie der quadratischen Reste erledigt hatte. Er sagt darüber in einem Briefe an DIRICHLET vom 30. Mai 1828 (W. II, S. 516), was folgt: »Die ganze Untersuchung, deren Stoff ich schon seit 23 Jahren vollständig besitze, die Beweise der Haupttheoreme aber (zu welchen das in der ersten Commentation noch nicht zu rechnen ist) seit etwa 14 Jahren« usw. — Fällt hiernach der Beginn seiner bezüglichen Forschungen spätestens in das Jahr 1805, so wird dieses Jahr von GAUSS auch früher schon, wo seine Erinnerung sicher zuverlässig war, zu wiederholten Malen (s. W. II, S. 50 und 161, *Comm. prima*, W. II, S. 67 und S. 165 in der Anzeige derselben, *Comm. secunda* W. II, S. 102) bestimmt als deren Anfang angegeben. Dem braucht die Tagebuchnotiz Nr. 130 vom 15. Februar 1807: »theoria residuorum cubicorum et biquadraticorum incepta« nicht zu widersprechen, da man in ihr den Anfang einer planmässig geordneten Entwicklung oder Darstellung seiner Ergebnisse erblicken darf, welche nach den Nummern 132, 133 T. und nach GAUSS' am 30. April 1807 an SOPHIE GERMAIN gerichteten Briefe (abgedruckt W. X 1, S. 70) schon eine gewisse Höhe erreicht hatten. Diese Ergebnisse finden sich dann schliesslich in zwei Abhandlungen, der *Theoria residuorum biquadraticorum, Comm. I u. II.* (Comm. Gotting. rec. 6, 1828, vorgelegt am 5. April 1825 und 7, 1832, vorgelegt am 15. April 1831), welche GAUSS als näher verwandt mit derjenigen der quadratischen Reste einer Darstellung der kubischen vor-

zog, wenn auch leider nur zu einem Teile veröffentlicht. Sie müssen zunächst in raschem Fortschritte gelungen sein, wie die Notizen Nr. 131—133 T. vom 17., 22., 24. Februar bezeugen, die ohne Zweifel die Auffindung der wesentlichsten Sätze der *Comm. prima* bedeuten. Dies sind in der Hauptsache die folgenden.

Beschränkt man sich auf den Fall der Primzahlen $p = 4n + 1$, welcher einzig Schwierigkeiten verursacht, so zerfallen die modulo p inkongruenten Zahlen z, welche sich bisher nur in zwei Klassen, quadratische Reste und Nichtreste, unterschieden, jenachdem $z^{\frac{p-1}{2}} \equiv +1$ oder -1 mod. p war, in der Theorie der biquadratischen Reste in vier Klassen A, B, C, D von je $\frac{p-1}{4}$ Zahlen, die bezüglich den Kongruenzen

$$z^{\frac{p-1}{4}} \equiv 1, f, f^2, f^3 \text{ mod. } p,$$

genügen, in denen $f^2 \equiv -1$ mod. p: die Klassen A, C zusammen sind die quadratischen Reste, B, D zusammen die quadratischen Nichtreste.

Die *Comm. prima* lehrt nun, in welche dieser Klassen die Zahlen -1 und 2 gehören. Die erstere gehört zu A oder C, jenachdem $p \equiv 1$ oder 5 (mod. 8). Die Zahl 2 ist quadratischer Nichtrest bezüglich der Moduln $p \equiv 5$ (mod. 8). Ist aber $p \equiv 1$ (mod. 8), so liess die Induktion GAUSS einen Zusammenhang der Frage mit der Zerlegung $p = \alpha^2 + 2\beta^2$ erkennen, wonach 2 zu A oder C gehört, jenachdem $\alpha \equiv \pm 1$ oder ± 3 (mod 8) ist, ein Satz, der unschwer zu begründen war.

Hierdurch fand sich nun GAUSS zu der Untersuchung geführt, ob ein ähnlicher Zusammenhang auch mit der für jede Primzahl $p = 4n + 1$ möglichen Zerlegung $p = a^2 + b^2$ stattfinde. Das ist in der Tat der Fall, aber er liegt tiefer. Die gedachte Zerlegung ist zunächst eng mit den Zahlen $m_k^{(h)}$ verbunden, welche bei der Bildung der biquadratischen Gleichung für die vier $\frac{p-1}{4}$-gliedrigen Perioden p^{ter} Einheitswurzeln auftreten und die Anzahl der Lösungen t, u der Kongruenz

$$1 + g^{4t+h} \equiv g^{4u+k} \text{ (mod. } p)$$

bezeichnen, wo g eine primitive Wurzel (mod. p) ist. Die Beziehungen zwischen ihnen, sowie die Werte von a, b bei der durch sie gelieferten Zerlegung

$p = a^2 + b^2$ ergeben den Satz, dass 2 beziehungsweise zu A, B, C, D gehört, jenachdem

$$\frac{b}{2} \equiv 0,\ 1,\ 2,\ 3 \pmod{4}.$$

Übrigens hängt das Vorzeichen von b und somit die Zugehörigkeit von 2 zu einer der Klassen B, D von der Wahl der Zahl f unter den beiden Wurzeln der Kongruenz $f^2 \equiv -1$, d. i. von der Wahl der primitiven Wurzel g ab, und es besteht zwischen a, b und f die Kongruenz $b \equiv af \pmod{p}$, eine Tatsache, die GAUSS (Nr. 133 T.) am 24. Februar 1807 gefunden zu haben scheint, und welche verstattet, den biquadratischen Charakter der Zahl 2 auch durch die Kongruenz

$$b'^{\frac{a'b'}{2}} \equiv a'^{\frac{a'b'}{2}} \cdot 2^{\frac{p-1}{4}} \pmod{p},$$

wo a', b' in der Formel $p = a'^2 + b'^2$ positiv, a' ungerade gedacht sind, auszusprechen (W. II, S. 96). Nebenbei finden sich a, b mittels der Entwicklung von

$$(x^4 + 1)^{\frac{p-1}{4}} \pmod{p}$$

als die absolut kleinsten Reste modulo p, welche den Kongruenzen

$$2a \equiv \frac{r}{s},\quad 2b \equiv \pm r^2 \pmod{p}$$

mit

$$s = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \frac{p-1}{4},\quad r = \frac{p+3}{4} \cdot \frac{p+7}{4} \ldots \frac{p-1}{2}$$

genügen. Ihnen zufolge ist $a \equiv 1 \pmod{4}$ und hierdurch seinem Vorzeichen nach bestimmt, während über dasjenige von b sich ohne weiteres nicht entscheiden lässt (s. unten S. 69). Ähnliche Sätze hat GAUSS noch mehrere gegeben in einer Notiz des Nachlasses, die W. X 1, S. 39 abgedruckt ist.

22.

Bei den Versuchen, auch für andere Zahlen den biquadratischen Charakter zu ermitteln, sah sich GAUSS zwar durch Induktion zu mancherlei Einzelresultaten geführt, beim Beweise derselben wie in der Erkenntnis allgemeinerer Sätze aber durch Schwierigkeiten gehemmt, die er in keiner Weise mit

den Mitteln der rationalen Zahlentheorie zu überwinden vermochte. Da kam ihm eine erlösende Eingebung, die zugleich die Grundlage des wichtigsten Gebietes der ganzen neueren Zahlentheorie, der Arithmetik der Zahlenkörper, geworden ist: »mox vero comperimus, principia Arithmeticae hactenus usitata ad theoriam generalem neutiquam sufficere, quin potius hanc necessario postulare, ut campus Arithmeticae sublimioris infinities quasi promoveatur« (W. II, S. 67). Er erfand die Theorie der komplexen ganzen Zahlen.

Über die Berechtigung komplexer Grössen hatte Gauss schon zur Zeit der D. A. sich eigene Gedanken gebildet, die er im art. 91 derselben gelegentlich zu entwickeln in Aussicht stellt — ein im Jahre 1831 in der Anzeige der *Comm. secunda* (W. II, S. 174—178) eingelöstes Versprechen — und die Lehre von der Kreisteilung, mehr noch seine Untersuchungen über die lemniskatischen Funktionen hatten sie ihm immer zwingender aufgedrängt; vielleicht, dass in der Notiz Nr. 95 T. vom Oktober 1798 unter dem novus in analysi campus die Theorie der Funktionen einer komplexen Variabeln verstanden werden muss.

So lag es ihm nahe, auch komplexe ganze Zahlen in Betracht zu ziehen. Man geht aber wohl nicht fehl, wenn man für den Gedanken, sie zur Grundlage der kubischen und biquadratischen Reste zu machen, die Quelle in der Beziehung erblickt, welche zwischen dem biquadratischen Charakter der Zahl 2 und der Darstellung $p = a^2 + b^2$, ebenso zwischen ihrem kubischen Charakter und der Darstellung $4p = a^2 + 27b^2$ (Nr. 133 T.) d. h. den Darstellungen von p als Norm komplexer ganzer Zahlen von Gauss erkannt worden war. Die Verwendung dieser komplexen Faktoren von p tritt grundlegend auch in den handschriftlichen Fragmenten über kubische und biquadratische Reste zu Tage, welche W. VIII, S. 5—14 abgedruckt und von Fricke erläutert sind und etwa aus derselben Zeit stammen, wie die Tagebuchnotizen Nr. 130—133, d. h. aus dem Februar 1807.

In diese Zeit fallen dann auch Gauss' Versuche, zu neuen Beweisen des quadratischen Fundamentaltheorems zu gelangen, in der Hoffnung, dass diese auch auf das höhere Gebiet ausdehnbar sein möchten, eine Hoffnung, die ihn nicht trog, denn sie führten ihn zum Gaussschen Lemma, dessen Erweiterung auf das Gebiet der komplexen Zahlen $a + bi$ die Grundlage seiner bezüglichen Beweisführungen bildet.

Neben induktiven Studien beschäftigten nun GAUSS mannigfache Versuche, den sogenannten Dezidenten einer Zahl für einen gegebenen Modul zu berechnen bezw. das gesamte Restsystem eines Moduls in geeignete Viertel einzuteilen und dgl. mehr, wie die von SCHERING erläuterten und in die Zeit nach 1811 datierten Fragmente (W. II, S. 313—85) und andere, ihnen zeitlich wohl voraufgehende handschriftliche Notizen des Nachlasses (in Ec 3, abgedruckt W. X 1, S. 56, und im Handbuch 18, Bd, vom Oktober 1805, S. 248—256) beweisen. Wohl gelegentlich solcher Versuche wurde GAUSS auch zu dem Satze geführt, der W. X 1, S. 51 aus seinem Nachlass abgedruckt ist, und der eng mit einem andern von M. A. STERN*) mitgeteilten GAUSSschen Satze zusammenhängt.

Es muss Wunder nehmen, dass GAUSS nirgends in seinem *Tagebuche* der Einführung der komplexen Zahlen, dieses von ihm selbst für so wichtig erkannten Fortschrittes der Arithmetik, Erwähnung tut. Man könnte geneigt sein, die Nummern 144, 145 T. vom 23. Oktober 1813 dahin zu deuten; doch könnte damit unmöglich der erste Gebrauch komplexer Zahlen gemeint sein, der, wie bemerkt, viel früher datiert, vielmehr nur etwa ihre systematische Grundlegung für die allgemeine Theorie der biquadratischen Reste, wie die *Comm. secunda* sie enthält. Wahrscheinlicher aber dünkt uns, dass GAUSS jetzt aus dieser Theorie die Hilfsmittel gewonnen hat, um die (von dem Satze über den biquadratischen Charakter der Zahl 2 verschiedenen) Haupttheoreme zu beweisen, von denen er im oben erwähnten Briefe an DIRICHLET schreibt, dass er ihre Beweise gerade etwa in dieser Zeit gefunden habe. Nach seiner Anzeige der *Comm. secunda* vom 23. April 1831 (siehe W. II, S. 173) waren ihm freilich diese Beweise schon »seit 20 Jahren« bekannt, doch ist diese Angabe wohl nur als eine abgerundete zu betrachten. Vielleicht sind die Nummern 144, 145 des *Tagebuchs* aber auch so zu verstehen, dass GAUSS in der Kreisteilung, wenn nicht gar, wie EISENSTEIN**), in der Lemniskatenteilung die Hilfsmittel zu jenen Beweisen gefunden hat; für das letztere könnte die anschliessende letzte Tagebuchnotiz Nr. 146, die einzige, in welcher von den komplexen Zahlen $a+bi$ die Rede ist, einigen Anhalt bieten.

---

*) Göttinger Nachrichten 1869, S. 330. Die STERNsche Notiz wird weiter unten als Anhang zu dem vorliegenden Aufsatze abgedruckt.

) CRELLES Journal für Mathematik **30 (1846), S. 185.

23.

Gauss hat die Darlegung der Beweise für die biquadratischen Haupttheoreme einer dritten Abhandlung vorbehalten, die aber niemals geschrieben worden ist. Die zweite gibt nur den Wortlaut des allgemeinen quadratischen (W. II, S. 130), sowie auch des allgemeinen biquadratischen Reziprozitätsgesetzes (W. II, S. 138), das zwischen zwei (primären) komplexen Primzahlen besteht, und beweist den sogenannten Ergänzungssatz, durch welchen der biquadratische Charakter der Zahl $1+i$ und ihrer sogenannten Assoziierten bestimmt wird. Vorauf geht eine, der Arithmetik rationaler Zahlen völlig parallellaufende, nur entsprechend reichere Arithmetik der komplexen Zahlen $a+bi$, gegründet auf das Euklidische Verfahren zur Bestimmung des grössten gemeinsamen Teilers von zwei solchen Zahlen; hieraus folgt die eindeutige Zerlegbarkeit jeder komplexen Zahl in sogenannte primäre Primfaktoren, deren es ausser der Zahl $1+i$ zwei Arten gibt, nämlich die reellen Primzahlen $q \equiv 3 \pmod{4}$ und die konjugiert komplexen Faktoren der reellen Primzahlen $p \equiv 1 \pmod{4}$.

Aus dem verallgemeinerten Fermatschen Lehrsatze, nach welchem, wenn π eine komplexe Primzahl und n ihre Norm bedeutet, jede durch π nicht teilbare komplexe Zahl $\varkappa$ der Kongruenz

$$\varkappa^{n-1} \equiv 1 \pmod{\pi}$$

genügt, entspringt eine Einteilung aller Reste von π in vier Klassen von gleichviel Zahlen, jenachdem

$$\varkappa^{\frac{n-1}{4}} \equiv 1,\ i,\ -1,\ -i \pmod{\pi}$$

ist, und die Frage, welcher dieser Klassen eine gegebene Zahl zugehört, ist die Frage nach ihrem biquadratischen Charakter. Verteilt man aber alle Reste in vier Gruppen C, C', C'', C''' derart, dass aus den Zahlen r der Gruppe C die der übrigen durch Multiplikation beziehungsweise mit $i, -1, -i$ entstehen, ist ferner $\varkappa$ eine durch π nicht teilbare komplexe Zahl und bezeichnet man bezw. mit c, c', c'', c''' die Anzahlen derjenigen Reste der Produkte $\varkappa r$, die den Gruppen C, C', C'', C''' angehören, so besteht die Kongruenz

$$\varkappa^{\frac{n-1}{4}} \equiv i^{c'+2c''+3c'''} \pmod{\pi},$$

die ersichtlich das Analogon des Gaussschen Lemma ist. Im Verein mit den Eigenschaften des schon in den Comm. Gotting. rec. 4 (W. II, S. 61) auftretenden Ausdrucks $\varphi(a, b)$ genügt sie zur Herleitung des biquadratischen Charakters von $1+i$.

Gauss hat, wie bemerkt, einen Beweis des biquadratischen Fundamentaltheorems nicht veröffentlicht. Umso interessanter ist es, dass in seinem Nachlasse (in Ec 3, abgedruckt W. X 1, S. 65) auf vier Oktavseiten geschrieben die flüchtige Skizze eines vollständigen Beweises gefunden worden ist, welcher, auf die Kreisteilung gegründet, dem Beweise VI des quadratischen Reziprozitätsgesetzes entspricht. Es scheint diese Skizze einer späteren Zeit zu entstammen, vielleicht hervorgerufen durch Eisensteins bezügliche Arbeiten*), dessen Symbol $\left[\frac{\varkappa}{m}\right]$ hier auch von Gauss zur Bezeichnung des biquadratischen Charakters von $\varkappa$ bezüglich m für den Fall einer komplexen Primzahl m verwandt wird, während er für den allgemeineren Fall einer zusammengesetzten Zahl m das Symbol $\left(\frac{\varkappa}{m}\right)$ benutzt. Sicherlich wohl enthält sie das, was nach einer von Eisenstein an Riemann getanen und von diesem an Schering weitergegebenen Aussage**) Gauss an Eisenstein brieflich mitgeteilt hat. Das Gesetz wird hier in etwas anderer Fassung als in der *Comm. secunda* dahin ausgesprochen, dass, wenn $m = a+bi$, $M = A+Bi$ zwei ungerade komplexe Zahlen ohne gemeinsamen Teiler und a, A ungerade sind,

$$\left(\frac{m}{M}\right) = i^{\frac{1}{2}bB}\cdot\left(\frac{M}{m}\right)$$

sei. An einer andern Stelle des Nachlasses (in Ec 2) sind noch verschiedene abweichende Formulierungen des Gesetzes vorhanden, deren eine hier mitgeteilt werden möge. Bezeichnen $m = a+bi$, $m' = a'+b'i$ zwei verschiedene ungerade komplexe Primzahlen, wobei a, a' ungerade, und setzt man

$$m'^{\frac{1}{4}(a^2+b^2-1)} \equiv i^{\mu} \pmod{m}, \quad m^{\frac{1}{4}(a'^2+b'^2-1)} \equiv i^{\mu'} \pmod{m'},$$

so ist

$$\mu-\mu'-\tfrac{1}{2}((a'-1)b+(a-1)b'+bb') \equiv 0 \pmod{4}.$$

*) Crelles Journal für Mathematik 28, 1844, S. 53 und 223.

**) Siehe Schering, Göttinger Nachrichten 1879, S. 384.

Eine im wesentlichen gleiche Formulierung steht auch in dem im September 1813 begonnenen Handbuche 21, Bg, S. 24 (abgedruckt W. X 1, S. 55), d. h. hinter den dort ebenfalls niedergeschriebenen Beweisen V und VI des quadratischen Reziprozitätsgesetzes (W. X 1, S. 33 und 28), sie ist also vermutlich auch jüngeren Datums als 12. November 1813, was sich mit Gauss' Angaben in dem erwähnten Briefe an Dirichlet wohl verträgt.

24.

Von dem, was Gauss in der Theorie der kubischen Reste, die er von Anfang an zugleich mit derjenigen der biquadratischen durchdachte, erarbeitet hat, geben uns nur die zuvor erwähnten Fragmente (W. VIII, S. 5—14) einige Kunde. Von ihnen finden sich die auf S. 5—8 abgedruckten in einem mit der Überschrift *Uraniae sacrum* versehenen, im November 1802 begonnenen Hefte (Al) des Nachlasses unmittelbar auf astronomische und magnetische Rechnungen folgend, die bis 1805 ausgedehnte Beobachtungen benutzen; sie werden also vermutlich nicht sehr viel später aufgezeichnet sein. Teils hat Gauss in ihnen den kubischen Charakter einer Zahl (mod. p) in Zusammenhang gebracht mit der Darstellbarkeit von p durch gewisse binäre quadratische Formen, teils ihn mit Hilfe der Kreisteilung festzustellen gelehrt. So wird neben einem ähnlichen Satze über biquadratische Reste folgende Aussage von ihm gegeben (W. VIII, S. 7): Seien $p \equiv 1$, $q \equiv \pm 1$ (mod. 3) zwei verschiedene Primzahlen und es werde entsprechend den doppelten Vorzeichen

$$(a + 3b\sqrt{-3})^{\frac{q \mp 1}{3}} \equiv A \pm B\sqrt{-3} \pmod{q}$$

gesetzt; je nach den drei möglichen Fällen

$$B \equiv 0,\ B \equiv A,\ B \equiv -A \pmod{q}$$

ist dann

$$q^{\frac{p-1}{3}} \equiv 1,\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{3b},\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{3b} \pmod{p}.$$

In dieser Aussage liegt unmittelbar, wenn man sich p in seine komplexen Faktoren zerlegt denkt, das kubische Fundamentaltheorem für den Fall

$q \equiv -1$ (mod. 3). GAUSS' im Nachlassteile Ec 1 befindlicher, W. VIII, S. 9 abgedruckter Beweis desselben aber, der später gefunden sein wird als die vorerwähnten Untersuchungen, entspringt aus dem gleichen Ideenkreise, wie sein Beweis VI des quadratischen und der erwähnte Beweis des biquadratischen Gesetzes, nämlich aus den Eigenschaften des Ausdrucks

$$r + \rho r^g + \rho^2 r^{g^2} + \cdots + \rho^{p-2} r^{g^{p-2}},$$

wo g eine primitive Wurzel (mod. p) und ρ eine kubische Einheitswurzel bedeutet. Da nach den FRICKEschen Erläuterungen (W. VIII, S. 11) aus jener Aussage auch für den Fall $q \equiv +1$ (mod. 3) das kubische Reziprozitätsgesetz, wie es später von JACOBI*) und EISENSTEIN**) bewiesen wurde, sich erschliessen lässt, ist mittelbar durch die GAUSSsche Methode dieses Gesetz schon vordem in seiner ganzen Allgemeinheit festgestellt worden.

Ein weiteres Fragment (abgedruckt W. VIII, S. 15) zeigt GAUSS bemüht, die Methode seiner Beweise III und V durch geeignete Einteilung des gesamten Restsystems eines Moduls in Drittel, wobei die Gittervorstellung benutzt wird, auf kubische Reste auszudehnen. Dass ein auf die Zahl Drei und einen Modul $p = 3n + 1$ bezüglicher Beweis ihm in ähnlicher Weise geglückt sein muss, zeigt die vom 6. Januar 1809 datierte Tagebuchnotiz (Nr. 138 T.), aus der wohl zu schliessen ist, dass das letztgenannte Fragment vor diesem Datum verfasst worden ist. Andererseits kann es nicht vor dem August 1808 geschrieben sein, da es in GAUSS' Handbuch 18, Bd, vom Oktober 1805 erst S. 205—213 auf astronomische Beobachtungen aus diesem Monate folgt.

25.

Aus etwa derselben Zeit d. h. also aus dem letzten Drittel des Jahres 1808 (s. W. II, S. 398) stammen andere handschriftliche Aufzeichnungen, welche allgemeiner die Theorie der aus einer dritten Einheitswurzel ρ gebildeten komplexen ganzen Zahlen zum Gegenstande haben (W. II, S. 387—398).

Ist $a + b\rho + c\rho^2$, wo ρ eine dritte Einheitswurzel bedeutet, eine komplexe Zahl mit rationalen a, b, c, so lässt sich eine nächstgelegene ganze komplexe

---

*) CRELLES Journal für Mathematik 2 (1827), S. 66, Werke VI, S. 233.

**) CRELLES Journal für Mathematik 27, S. 289; 28, S. 28 (1841).

Zahl so bestimmen, dass der »Determinant« (d. i. die Norm) der Differenz kleiner als 1 wird. Infolge hiervon ist der EUKLIDische Algorithmus anwendbar und folglich herrscht auch im Gebiete dieser komplexen ganzen Zahlen eindeutige Zerlegbarkeit. Hiermit hatte GAUSS die Grundlage gewonnen, um das »letzte FERMATsche Theorem« für den dritten Grad, nämlich die Unlösbarkeit der kubischen Gleichung

$$x^3 + y^3 + z^3 = 0$$

nicht nur in rationalen, sondern allgemeiner in komplexen ganzen Zahlen der gedachten Art zu beweisen. Dieselben Identitäten benutzend, deren auch LEGENDRE und die späteren Forscher sich bedient haben, zeigt GAUSS zunächst, dass, wenn jene kubische Gleichung bestehen soll, eine der drei Zahlen x, y, z durch $1-\rho$ teilbar sein muss, und leitet dann (auf zwiefachem Wege) aus einer vorausgesetzten Lösung in teilerfremden Zahlen eine zweite (und dritte) von gleicher Beschaffenheit her. Bei der auf dem zweiten Wege erhaltenen neuen Lösung ist die durch $1-\rho$ teilbare Zahl nicht mehr ebenso oft durch $1-\rho$ teilbar wie früher, wodurch der Beweis erbracht ist. Hier tritt auch schon der später von KUMMER*) begründete Satz auf, dass eine komplexe ganze Zahl $f(\rho)$, deren analytischer Modul gleich 1 ist, $\pm\rho^n$ sein muss.

Was endlich die Fragmente W. VIII, S. 21 anbelangt, so finden sich die beiden ersten von ihnen in GAUSS' Handbuch 18, Bd vom Oktober 1805, S. 201—204, also nach den schon bei dem Fragmente W. VIII, S. 15 erwähnten Beobachtungen vom August 1808, aber vor diesem Fragmente selbst und sind demnach zwischen denselben Daten verfasst wie dieses. Die im zweiten derselben behandelte kubische Form

$$x^3 + ny^3 + n^2z^3 - 3nxyz$$

tritt schon auf S. 151 jenes Handbuchs auf d. i. vor dem Beweise für die Irreduzibilität der allgemeinen Kreisteilungsgleichung, den man auf den 12. Juni 1808 datieren darf, und findet sich auch an andern Stellen des Nachlasses, so z. B. auf einer leider undatierten Rechnung für die Sternwarte in Göttingen in Ec 1, woher auch das dritte der Fragmente (W. VIII, S. 23)

---

*) *De numeris complexis, qui radicibus unitatis et numeris integris realibus constant*, Vratislaviae typis universitatis, 1844; vergl. CRELLEs Journal für Mathematik 35 (1847), S. 362.

entnommen ist. Alle diese Notizen stammen wohl ziemlich aus der gleichen Zeit. Die gedachten Fragmente lassen nun ersehen, dass GAUSS auch die aus einer beliebigen Kubikwurzel $\nu = \sqrt[3]{n}$ für ein ganzzahliges n gebildeten komplexen ganzen Zahlen in den Bereich seiner Untersuchungen gezogen hat. Ist $a + b\nu + c\nu^2$ eine solche, so ist ihre Norm

$$N = a^3 + nb^3 + n^2c^3 - 3nabc$$

und n ist kubischer Rest in Bezug auf jeden Teiler von N. Durch die Substitution

$$\begin{aligned} x &= ax' + ncy' + nbz' \\ y &= bx' + ay' + ncz' \\ z &= cx' + by' + az' \end{aligned}$$

geht die Form $x^3 + ny^3 + n^2z^3 - 3nxyz$ über in

$$N.(x'^3 + ny'^3 + n^2z'^3 - 3nx'y'z'),$$

ein Satz, welcher die Reproduktion dieser Form durch Zusammensetzung mit sich selbst ausspricht und eine Grundlage bildet für die Auflösung der Gleichung

$$x^3 + ny^3 + n^2z^3 - 3nxyz = 1,$$

mit der sich GAUSS (Nr. 137 T.) vom 23. Dezember 1808 an ebenfalls beschäftigt hat.

d. Transzendente Zahlen. Asymptotische Gesetze und mittlere Werte. Bestimmung der Klassenanzahl.

26.

Um vollständig zu sein, muss noch erwähnt werden, dass GAUSS auch der Frage nach der arithmetischen Beschaffenheit der Zahl π nahe getreten ist und einen eigenen Beweis für die Irrationalität der Tangenten rationaler Bögen gegeben hat (W. VIII, S. 27) nebst kritischen Bemerkungen über die voraufgegangenen bezüglichen Arbeiten von LAMBERT und LEGENDRE*). Desgleichen

*) Die kritischen Bemerkungen, von denen im Text die Rede ist, werden von R. FRICKE in seiner

sind hier die umfangreichen Rechnungen und Tabellen (W. II, S. 477—495) zur Zyklotechnie zu nennen, die GAUSS ausgeführt hat und welche den Zweck verfolgen, die Bögen, deren Kotangenten gegebene rationale Zahlen sind, genau zu berechnen. Auf Grund der Formel

$$\operatorname{arc\,cotg}\frac{y}{a} = \operatorname{arc\,cotg}\frac{y+x}{a} + \operatorname{arc\,cotg}\frac{y+z}{a}$$

für

$$y^2 + a^2 = xz$$

lassen sich die Bögen für kleine Kotangenten aus denen für grosse bestimmen, für welche die bekannten Reihen stärker konvergieren. So hat GAUSS u. a. (s. W. II, S. 501) für $\frac{\pi}{4}$ die beiden Ausdrücke

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4} &= 12(18) + 8(57) - 5(239)\\ &= 12(38) + 20(57) + 7(239) + 24(268)\end{aligned}$$

gegeben, in denen (18) = arc cotg 18 usw. ist, und die wesentlich schneller zum Ziele führen als frühere, von MACHIN, EULER, VEGA u. A. gegebene ähnliche Formeln.

Veröffentlicht hat GAUSS weitere zahlentheoretische Arbeiten nicht, obwohl er zweifelsohne noch Manches gewusst hat, dessen Kenntnis für uns wertvoll gewesen sein würde. Wir haben nun aber, auf die Zeit der D. A. zurückgehend, in Anknüpfung an die artt. 301 und 302 derselben noch von einem andern Gebiete zu handeln, dessen Aufschliessung wir gewohnt sind, DIRICHLET

Bemerkung W. VIII, S. 29 erwähnt, sind aber nicht abgedruckt. Sie stehen auf mehreren Kleinoktavblättern und sind augenscheinlich früher geschrieben als der auf einem Grossquartblatte stehende, W. VIII, S. 27, 28 abgedruckte »Beweis« (beides in Ee, Kapsel 45). Von diesem »Beweis« findet sich übrigens auch noch eine von fremder Hand herrührende Abschrift, die am Schluss die Angabe enthält »GAUSS 1850 August 20«. Die kritischen Bemerkungen beziehen sich auf die von LEGENDRE in seinen *Élémens de Géométrie* (S. 295 in der 7. Ausgabe von 1808) erwähnte Abhandlung von LAMBERT »in den Mem. de l'Ac. de Berlin 1761«. Gemeint ist offenbar die Abhandlung *Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendantes circulaires et logarithmiques*, lu en 1767, Histoire de l'Académie, Berlin (1761) 1768, S. 265. GAUSS sagt in bezug auf den dort von LAMBERT gegebenen Beweis für die Irrationalität von π: »Dieser Beweis ist auf eine ziemlich schwerfällige und verworrene Art dargestellt, und man könnte sagen, dass die Denkschrift nicht sowohl einen klar entwickelten Beweis enthalte, als vielmehr nur das Material zu dem Beweise. Folgende Erläuterungen können dazu dienen, das Verständnis zu erleichtern«. In bezug auf diese Abhandlung LAMBERTS vergl. man den Aufsatz von A. PRINGSHEIM »*Über die ersten Beweise der Irrationalität von e und* π«, Münchener Sitzungsberichte 28, 1898, S. 325, wo auch EULER als Vorgänger von LAMBERT zu seinem Rechte kommt.

zuzusprechen, wenn wir von seinen »analytischen Methoden der Zahlentheorie« reden. Den selbständigen Leistungen dieses Forschers geschieht kein Abbruch, wenn man auch nach dem Zeugnis des handschriftlichen Nachlasses von GAUSS anerkennen muss, dass vor DIRICHLET schon GAUSS auch in diesem Gebiete Pfadfinder gewesen ist.

Es handelt sich zunächst um asymptotische Gesetze der Zahlentheorie*). Hier hatte GAUSS, wie erwähnt, mit der Abzählung der Primzahlen frühzeitig begonnen, sie nach 1811 von Zeit zu Zeit fortgesetzt und später durch GOLDSCHMIDT bis zum Umfange der Tafel W. II, S. 435 weiterführen lassen; auch hatte er bald schon den Integrallogarithmus als geeigneten asymptotischen Ausdruck für die Menge der Primzahlen unter einer gegebenen Grenze erkannt. In der Tat finden sich in GAUSS' Exemplar der *logarithmischen Tafeln* von SCHULZE Aufzeichnungen vom Mai 1796 (vergl. Nr. 9 T. vom 31. Mai 1796), nach denen die Menge der Primzahlen unterhalb a asymptotisch durch $\frac{a}{\log a}$, die Menge der Zahlen, welche aus zwei Primfaktoren zusammengesetzt sind, durch $\log\log a \cdot \frac{a}{\log a}$ und »wahrscheinlich« die Menge derjenigen, welche aus drei Primfaktoren bestehen, durch $\frac{1}{2}(\log\log a)^2 \cdot \frac{a}{\log a}$ usw. in infinitum ausgedrückt werde. Ferner gibt GAUSS an derselben Stelle für die Menge der Zahlen unterhalb a ohne gleiche Faktoren den asymptotischen Ausdruck

$$\frac{a}{\sum\limits_n \frac{1}{n^2}},$$

allgemeiner für die Menge derjenigen, welche höchstens $\varkappa = 2, 3, \ldots$ gleiche Faktoren haben, den Ausdruck

$$\frac{a}{\sum\limits_n \frac{1}{n^{\varkappa+1}}}.$$

Desgleichen findet er für die Summe der reziproken Primzahlen unterhalb x die Gleichung

$$\sum \frac{1}{p} = \log\log x + V,$$

*) Zum Folgenden vergl. W. X 1, S. 11 ff., wo die im Text besprochenen Nachlassstücke abgedruckt sind; in den Bemerkungen S. 16 ff. findet man auch Hinweise auf die neuere Literatur.

wo V wahrscheinlich eine der Zahl 1,266 nahe Konstante sei und für das entsprechende Produkt

$$\prod \frac{1}{1-\frac{1}{p}}$$

den Ausdruck $a . \log x$, wo a eine der Zahl 1,874 nahe Konstante. Noch findet sich der Ausspruch: numerus factorum usque ad n

$$(\log \log n + 1) n.$$

In GAUSS' Exemplar der LAMBERTschen *Tabellen* wird für die Anzahl aller nur aus den Faktoren 2, 3, 5, 7 bestehenden Zahlen unterhalb n der (nicht korrekte) asymptotische Ausdruck gegeben:

$$\frac{\frac{1}{8}(\log n)^4}{\log 2 . \log 3 . \log 4 . \log 5}.$$

Desgleichen steht in einem im November 1799 begonnenen Hefte des Nachlasses (Ac) S. 19 der Satz, dass die Summe

$$\sum_1^n \frac{\varphi(n)}{n^2},$$

wo $\varphi(n)$ die EULERsche Funktion, quam proxime durch $\frac{6}{\pi^2} \log n + \text{const.}$ ausgedrückt werde, während die Konstante etwa 0,697413 sei: und in einem andern im Juli 1800 begonnenen Hefte (Ae) wird S. 39 für die Anzahl $\psi(M)$ der Teiler einer Zahl M die asymptotische Formel

$$\sum \psi(M) = M \log M + 0,15443 + ?$$

gegeben. Die Notizen Nr. 14 und 31 des GAUSSschen *Tagebuchs* vom 20. Juni und 6. September 1796 sprechen ferner zwei asymptotische Gesetze aus, für die zuerst DIRICHLET einen Beweis bekannt gemacht hat, und welche mit Benutzung des EULERschen Zeichens $\int n$ für die Summe der Teiler einer Zahl n sowie der EULERschen Funktion $\varphi(n)$ in den Formeln

$$\frac{\int 1 + \int 2 + \cdots + \int n}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{\pi^2}{6}$$

d. i.

$$\frac{\int 1 + \int 2 + \cdots + \int n}{n} = \frac{\pi^2}{12} \cdot n$$

beziehungsweise

$$2 \cdot \frac{\varphi(2) + \varphi(3) + \cdots + \varphi(n)}{n^2} = \frac{6}{\pi^2}$$

ihren Ausdruck finden. Die letztere Formel hat GAUSS auch auf einem aus den letzten Augusttagen des Jahres 1796 stammenden *Exercitationes mathematicae* betitelten Blättchen (abgedruckt W. X 1, S. 138, siehe besonders S. 140) aufgezeichnet.

Bei dem gänzlichen Fehlen jeder Andeutung einer für die Auffindung dieser Formeln dienenden Methode hat es fast den Anschein, als ob alle diese Ergebnisse nur induktiv gefunden seien, so schwer es andererseits zu denken ist, dass derartig verborgen liegende Beziehungen ohne den Anhalt bestimmter theoretischer Gesichtspunkte erkannt sein sollten.

27.

Neben diesen nur handschriftlich vorhandenen Sätzen stehen die in den genannten Artikeln der D. A. angeführten asymptotischen Bestimmungen des dort definierten »Mittelwerts« für die Anzahl der Geschlechter eigentlich primitiver binärer quadratischer Formen als Funktion ihrer Determinante $\pm D$:

$$\frac{4}{\pi^2} \cdot \log D + \frac{8}{\pi^2} C + \frac{48}{\pi^4} \cdot \sum \frac{\log n}{n^2} - \frac{2 \log 2}{3\pi^2},$$

wo C die EULER-MASCHERONISche Konstante bedeutet, und des Mittelwerts für die Anzahl ihrer Klassen bei negativer Determinante $-D$:

$$\frac{2\pi}{7 \cdot \sum \frac{1}{n^3}} \cdot \sqrt{D} - \frac{2}{\pi^2}.$$

Obwohl auch hier jede Andeutung der angewandten Methode fehlt, wird doch ausdrücklich von GAUSS ausgesprochen (art. 304), dass er durch eine theoretische Untersuchung, deren Grundsätze er bei anderer Gelegenheit mitteilen wolle, zu diesen Formeln gelangt sei, und ein schriftlicher Vermerk (W. I, S. 476, Anmerkung zum art. 302) in seinem Handexemplare der D. A. setzt die Entstehung derselben auf den Anfang des Jahres 1799. In der Tat findet man in GAUSS' im November 1799 begonnenen Heftchen (Ac, S. 19) (abgedruckt W. X 1, S. 15) die erstere Anzahl, freilich erst in der unbestimmteren Form

$$\alpha \log D + \beta,$$

und an anderer Stelle (Eb) schon etwas bestimmter und mit dem Zusatz: »Multitudo generum per disquisitionem theoreticam inventa est« durch

$$\frac{8}{\pi^2} \log D + \text{const.}^{*})$$

ausgesprochen. Der für die zweite Anzahl angegebene Ausdruck, abgesehen von der Konstanten $\frac{-2}{\pi^2}$, welche GAUSS auch an späterer Stelle (W. II, S. 284) unterdrückt hat, tritt bereits in GAUSS' im November 1798 begonnenem Heft (Ab) S. 8 auf, ohne Angabe seiner Bedeutung. Die entsprechende Untersuchung für Formen mit positiver Determinante, deren Resultat schon in art. 304 D. A. richtig vermutet wird, erledigte sich nach dem Additamentum ad. art. 306 X (W. I, S. 466) und der Anmerkung zu demselben (ebendas. S. 476) erst am Ende des Jahres 1800. In dieser Zwischenzeit muss GAUSS die analytischen Betrachtungen ausgebildet haben, die er in zwei Abhandlungen aus den Jahren 1834, 1837 niedergelegt hat und die (W. II, S. 269) mit ausführlichen Erläuterungen DEDEKINDS abgedruckt sind, Betrachtungen, welche ihn schon vor DIRICHLET zur Bestimmung des wahren Wertes der Klassenanzahl geführt haben.

Sie gründen sich auf denselben geometrischen Hilfssatz wie bei DIRICHLET. Denkt man sich im rechtwinkligen Gitter ganzzahliger Punkte, wie es bei den komplexen ganzen Zahlen $a+bi$ auftritt, eine geschlossene Kurve vom Inhalte V und nennt M die Anzahl der Gitterpunkte (oder Quadrate $\varkappa^2$), welche in ihr Inneres fallen, so ist, wenn die Kurve gleichmässig nach allen Richtungen unendlich erweitert wird, $\lim \frac{M}{V} = 1$, oder anders ausgedrückt: bleibt V konstant, nehmen aber die Quadrate unendlich ab, so ist

$$\lim_{\varkappa=0} \frac{M\varkappa^2}{V} = 1.$$

Da die Anzahl der Punkte innerhalb der Kurve

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = A$$

bei negativer Determinante $-D$ die Anzahl $F(A)$ der Darstellungen aller Zahlen $1, 2, 3, \ldots, A$ mittels der Form (a, b, c) ist, so ergibt sich dem Hilfs-

*) Im Nachlasse steht in diesen Formeln N statt D, sicher aber in gleicher Bedeutung.

satze zufolge für die mittlere Anzahl der Darstellungen einer Zahl A durch dieselbe Form die Gleichung

$$\lim_{A=\infty} \frac{F(A)}{A} = \frac{\pi}{\sqrt{D}}.$$

Da sie nur von der Determinante D abhängt, so erschliesst man für die mittlere Anzahl der Darstellungen einer Zahl A durch das gesamte Formensystem mit der Determinante $-D$ den Wert

$$h \cdot \frac{\pi}{\sqrt{D}},$$

in welchem h die Klassenzahl dieses Systems bedeutet.

Stimmen soweit die Methoden beider Forscher mit einander überein, so unterscheiden sie sich in der Herleitung eines zweiten Grenzwertes für dieselbe mittlere Anzahl d. i. in deren Zurückführung auf die Summe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n},$$

bezüglich welcher auch die erhaltenen Gaussschen Notizen nicht genügenden Aufschluss geben. An einem besonders glücklichen Tage aber, dem 30. November 1800 (Nr. 114 T.), gelang es Gauss, die Klassenanzahl für Formen mit negativer Determinante unter dreifacher Gestalt zu bestimmen: einmal mittels der gedachten Summe, ein zweites Mal unter der Gestalt eines unendlichen Produktes, ein drittes Mal mittels trigonometrischer Funktionen (s. W. II, S. 285, wo auch für die Klassenanzahl bei positiver Determinante entsprechende Ausdrücke gegeben sind), und er fand endlich noch am 3. Dezember desselben Jahres (Nr. 115 T.) für Formen mit negativer Determinante $-D$ jenen einfachen, nur aus der Menge der Zahlen unterhalb D, welche Teiler bezw. Nichtteiler der Form x^2+D sind, gebildeten Ausdruck (s. ihn W. II, S. 286, [VII]) für den Fall, wo D eine Primzahl von der Form $4n+1$ ist), den für diesen einfachsten Fall einer Primzahldeterminante $-p$ zuerst Jacobi*) bekannt gemacht hat.

Mit Hilfe dieses Ausdrucks konnte Gauss eine Reihe von Sätzen über die

*) Crelles Journal für Mathematik 9 (1832), S. 189, Werke VI, S. 120.

Verteilung der quadratischen Reste (mod. p) auf die Achtel bezw. Zwölftel des Intervalls 1 bis p aufstellen (W. II, S. 288—291, 301—303), sowie endlich auch, was gelegentlich der *Comm. prima* über biquadratische Reste noch als eine Lücke angedeutet worden, für den Fall $p \equiv 5$ (mod. 8) die, für den andern Fall $p \equiv 1$ (mod. 8) bis auf den heutigen Tag noch ungelöste Frage entscheiden (W. II, S. 287), mit welchem Vorzeichen behaftet die Basis b der Zerlegung $p = a^2 + b^2$ im Schlusstheoreme jener Abhandlung erhalten werde. Diese Verknüpfung einander scheinbar sehr entlegener Gegenstände und Gedanken, hat Gauss selbst als eine sehr verschlungene und interessante bezeichnet (Brief an Dirichlet vom 30. Mai 1828, W. II, S. 516).

So sehen wir, wohin wir uns auch wenden, Gauss' Forschung schon in jedes der verschiedenen Gebiete, welche die heutige Wissenschaft der höheren Arithmetik umfasst, tief und bahnbrechend eindringen; keins, das nicht — die additive Zahlentheorie etwa ausgenommen — auf Gauss' Arbeiten als seine Grundlage oder den Keim seiner Entwicklung zu weisen hätte. Denn auch die Idealtheorie der algebraischen Zahlenkörper weist uns auf die von Gauss erkannte Notwendigkeit der Zahlen $a + bi$ zurück und ist nur ihr Analogon auf höherer Stufe.

SCHLUSSBEMERKUNG.

Die meisten textlichen Änderungen und neu hinzugekommenen Fussnoten, die der vorstehende Abdruck meines Aufsatzes gegenüber der ursprünglichen, 1911 erschienenen Fassung aufweist, sind aus Mitteilungen der Herren F. Klein, L. Schlesinger und P. Stäckel hervorgegangen. Herrn Schlesinger ist auch die übersichtliche Gliederung zu verdanken, die der Aufsatz erhalten hat.

Bachmann.

ANHANG.

ÜBER EINEN SATZ VON GAUSS.

Von M. A. Stern.

Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften
und der G. A.-Universität zu Göttingen, 1869, S. 330—334.

Unter den wissenschaftlichen Papieren meines verstorbenen Freundes Dr. M. Reiss, deren Durchsicht ich im Auftrage seiner Familie unternommen habe, findet sich ein aus 32 Quartseiten bestehendes Heft, welches ohne Zweifel gänzlich von Gauss geschrieben ist. Es besteht fast nur aus Formeln und Rechnungen, selten sind einzelne Worte eingestreut. Die Entstehung dieses Heftes ist leicht zu erklären. Reiss hat nemlich von Ostern 1823 bis Ostern 1825 hier in Göttingen studirt und bei Gauss Privatissima gehört. Das erwähnte Heft enthält die Entwickelungen, welche Gauss während des mündlichen Vortrages niederschrieb. Es ergiebt sich dies deutlich aus einem andern von Reiss geschriebenen und unter seinen Papieren befindlichen Hefte, welches die Aufschrift hat: *Ausarbeitung des in dem Vortrage des Herrn Hofrath Gauss Enthaltenen, angefangen den 8. Nov. 1824.* Dieses Reisssche Heft nebst einigen dazu gehörenden losen Blättern enthält, wie die Übereinstimmung der Formeln zeigt, die Ausarbeitung dessen, was auf den ersten 10 Seiten des von Gauss geschriebenen Heftes vorkommt und z. B. den Beweis des Harriotschen Lehrsatzes, welchen Gauss später in dem Crelleschen Journal f. d. Mathematik [3, 1828, S. 1, Werke III, S. 65] bekannt gemacht hat. Mehr habe ich nicht aufgefunden. An einer Stelle des Reissschen Heftes wird eine von Gauss im Sommer 1824 ersonnene Methode erwähnt. Man kann hieraus in Verbindung mit dem oben erwähnten Datum schliessen, dass das von Gauss geschriebene Heft im Laufe des Wintersemesters 1824—1825 entstanden ist.

Nur an einer Stelle dieses Heftes findet sich eine grössere Zahl zusammenhängender Worte und diese enthalten einen Satz aus der höheren Arithmetik. Die Worte lauten:

> a ganze (pos. oder neg.) Zahl von der Form $4k+1$
> n beliebige ganze positive Zahl ungerade
> a und n sollen keinen gemeinschaftlichen Theiler haben
> f alle ungeraden Zahlen $1, 3, 5, 7, \ldots, n-2$
> q ganzer Theil des Quotienten $\frac{af}{n}$.

Unter allen q finden sich ebensoviele von der Form $4k+2$ wie von der Form $4k+3$.

Hierauf folgen Formeln, welche offenbar in keiner Beziehung zu diesen Worten stehen. Dann aber kommen Andeutungen eines Beweises des in diesen Worten enthaltenen Satzes, welche man leicht ergänzen kann. Ich lasse hier diesen Beweis folgen, indem ich bemerke, dass ich das von mir hinzugefügte in Klammern eingeschlossen habe; alles Übrige steht in dem Hefte.

[Es bezeichne]

f die Zahlen $1, 3, 5, 7, 9, \ldots, n-2$
g die Zahlen $2, 4, 6, 8, 10, \ldots, n-1$
h die Zahlen $1, 2, 3, 4, \ldots, \frac{1}{2}(n-1)$
i die Zahlen $\frac{1}{2}(n+1), \frac{1}{2}(n+3), \ldots, n-1$,

f^0 die Zahlen $\frac{af}{n}$, deren ganzer Theil von der Form $4k$
f' die Zahlen $\frac{af}{n}$, deren ganzer Theil von der Form $4k+1$
[f'' die Zahlen $\frac{af}{n}$, deren ganzer Theil von der Form $4k+2$
f''' die Zahlen $\frac{af}{n}$, deren ganzer Theil von der Form $4k+3$]
g^0 die Zahlen $\frac{ag}{n}$, deren ganzer Theil von der Form $4k$,

[ebenso bezeichne g', g'', g''' die Zahlen $\frac{ag}{n}$, deren ganzer Theil bezüglich von der Form $4k+1$, $4k+2$, $4k+3$ ist und h^0, h', h'', h''' die Zahlen $\frac{ah}{n}$, deren ganzer Theil bezüglich von der Form $4k$, $4k+1$, $4k+2$, $4k+3$ ist, ferner i^0, i', i'', i''' die Zahlen $\frac{ai}{n}$, deren ganzer Theil bezüglich von der Form $4k$, $4k+1$, $4k+2$, $4k+3$ ist. Sei F^0, F', F'', F''' bezüglich die Anzahl der f^0, f', f'', f''', dieselbe

Bedeutung sollen G^0, G', G'', G''' in Beziehung auf g, H^0, H', H'', H''' in Beziehung auf h, I^0, I', I'', I''' in Beziehung auf i haben. Dann ist:]

$$\begin{aligned} F^0 + G^0 &= H^0 + I^0 \\ F' + G' &= H' + I' \\ F'' + G'' &= H'' + I'' \\ F''' + G''' &= H''' + I'''. \end{aligned}$$

Jedes $2h^0$ ist entweder ein g^0 oder g'
Jedes $2h'$ ist entweder ein g'' oder g'''
Jedes $2h''$ ist entweder ein g^0 oder g'
Jedes $2h'''$ ist entweder ein g'' oder g'''.

also [die] $2h^0$ vereinigt mit den $2h''$ [giebt] g^0 oder g'
[die] $2h'$ vereinigt mit den $2h'''$ [giebt] g'' oder g'''.

[Hieraus folgt]

$$\begin{aligned} H^0 + H'' &= G^0 + G' \\ H' + H''' &= G'' + G''' \end{aligned}$$

[und da $F''' + G''' = H''' + I'''$]

$$\begin{aligned} G''' &= H''' + I''' - F''' \\ &= H' + H''' - G'' \end{aligned}$$

also

$$I''' - F''' = H' - G''$$

oder

$$I''' - H' = F''' - G''.$$

[Nun liegt] ai^0 zwischen $4kn$ und $4kn+n$ [, also] $a(n-i^0)$ zwischen $an-(4kn+n)$ und $an-4kn$.

[Ist] $a = 4\lambda+1$ [, so liegt] $a(n-i^0)$ zwischen $4(\lambda-k)n$ und $4(\lambda-k)n+n$ [, d. h. es giebt so viel Zahlen i^0 als h^0. Ebenso findet man, dass es soviel Zahlen i' als h''', soviel Zahlen i'' als h'' und soviel Zahlen i''' als h' giebt. Also:]

$$\begin{aligned} I^0 &= H^0 \\ I' &= H''' \\ I'' &= H'' \\ I''' &= H'. \end{aligned}$$

[Aus der letzten Gleichung folgt]

$$F''' = G''.$$

[Aus denselben Betrachtungen findet man aber auch]

$$F^0 = G^0$$
$$F' = G'''$$
$$F'' = G''$$
$$F''' = G',$$

[also]

$$F'' = F''',$$

[was zu beweisen war, und]

$$G' = G''[*)].$$

Ich bemerke noch schliesslich, dass ich diesen Satz auf ähnliche Weise in dem Crelleschen Journal für d. Mathematik Bd. 59 [, 1861, S. 146] bewiesen habe.

BEMERKUNGEN ZU DER VORSTEHENDEN NOTE.

I. Der von Stern mitgeteilte Gausssche Satz steht in nächster Beziehung zu dem Werke X 1, S 51 aus Gauss' Nachlass abgedruckten Satze, der, soweit er sich auf ein ungerades n bezieht, leicht aus ihm ableitbar ist. Mit Beibehaltung der in der vorstehenden Note angewandten Bezeichnung und indem

$$af = qn + r, \quad 0 \overline{\gtrless} r < n; \quad q' = \left[\frac{q}{4}\right]$$

gesetzt wird, entsprechen den Werten

$$f = f^0, f', f'', f'''$$

die Werte

$$\left[\frac{af}{4n} + \frac{1}{2}\right] = q', q', q'+1, q'+1$$

$$\left[\frac{af}{4n}\right] = q', q', q', q'$$

$$\left[\frac{af}{4n} + \frac{1}{2}\right] - \left[\frac{af}{4n}\right] = 0, 0, 1, 1.$$

Daher ist

$$\Sigma_f\left(\left[\frac{af}{4n} + \frac{1}{2}\right] - \left[\frac{af}{4n}\right]\right) = F'' + F'''.$$

Ebenso findet sich

$$\Sigma_h\left(\left[\frac{ah}{4n} + \frac{1}{2}\right] - \left[\frac{ah}{4n} + \frac{1}{4}\right)\right] = H''.$$

[*) In dem Manuskripte steht] $F' = F'''$, $G' = G'''$.

Nach der vorstehenden Note ist aber

$$F'' + G'' = H'' + I'',$$

andererseits

$$G'' = F''', \; H'' = I'',$$

also

$$F'' + F''' = 2H'',$$

wie in dem Satze Werke X 1, S. 51 ausgesagt wird. Da $F'' = F'''$ ist, so folgt noch

$$F'' = F''' = H''.$$

BACHMANN.

II. Angaben über Leben und Schriften von MICHEL REISS (geb. 1805 zu Frankfurt a. M., gest. ebendaselbst 1869) findet man in der *Allgemeinen Deutschen Biographie* XXVIII (1889). S. 143 und in POGGENDORFFS *Biograph.-Literar. Handwörterbuch* III (1898), S. 1104. Die in der Einleitung zu der vorstehenden Note erwähnten Hefte hat der Sohn von M. A. STERN, Professor ALFRED STERN (Zürich) nach dem Tode seines Vaters (1894) der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen geschenkt.

SCHLESINGER.

GAUSS UND DIE VARIATIONSRECHNUNG

VON

OSKAR BOLZA



Die Beziehungen von GAUSS zur Variationsrechnung finden sich im wesentlichen in den beiden Arbeiten: »*Principia generalia theoriae figurae fluidorum in statu aequilibrii*«[1] und »*Disquisitiones generales circa superficies curvas*«[2]. In der ersten Arbeit hat GAUSS unmittelbar an einer wichtigen Stelle in die Entwicklung der Variationsrechnung eingegriffen; in der zweiten spielt die Variationsrechnung zwar unmittelbar nur eine untergeordnete Rolle, aber um so grösser ist ihre mittelbare Wirkung auf die Variationsrechnung gewesen, insofern die GAUSSschen Untersuchungen über geodätische Linien aufs engste mit den fundamentalsten Fragestellungen der neueren Variationsrechnung in Zusammenhang stehen und dazu vielfach den Anstoss gegeben haben. Ferner findet sich eine wichtige Anwendung der Variationsrechnung in der Arbeit: »*Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungskräfte*«[3], in der GAUSS ein Existenztheorem der Potentialtheorie nach einer Methode beweist, deren Grundgedanke mit dem DIRICHLETschen Prinzip identisch ist. Mit diesen drei Arbeiten beschäftigen sich der Reihe nach die drei ersten Teile der folgenden Darstellung. Daran schliesst sich dann noch ein vierter Teil, in dem verschiedene vereinzelte kürzere Anwendungen besprochen werden, die GAUSS gelegentlich von der Variationsrechnung gemacht hat, und die sich in seinem Nachlass gefunden haben.

---

1) Werke, Bd. V, S. 29.

2) Werke, Bd. IV, S. 217.

3) Werke, Bd. V, S. 195.

I. Teil: Die Principia generalia theoriae figurae fluidorum in statu aequilibrii.

In der Arbeit: *Principia generalia theoriae figurae fluidorum in statu aequilibrii* werden zum ersten Mal in der Geschichte der Variationsrechnung für ein zweidimensionales Variationsproblem mit variablem Integrationsbereich die aus dem Verschwinden der ersten Variation folgenden Bedingungen vollständig aufgestellt, also nicht nur die partielle Differentialgleichung des Problems, sondern insbesondere auch die auf die Begrenzung bezügliche Randbedingung.

Um daher die Bedeutung dieser Arbeit für die Variationsrechnung würdigen zu können, wird es nötig sein, einen Überblick über die Geschichte der Extrema von Doppelintegralen vor Gauss vorauszuschicken.

I. Abschnitt: Überblick über die Geschichte der Extrema von Doppelintegralen vor Gauss.

1. Schon in seiner ersten grundlegenden Arbeit vom Jahre 1760/1 hatte Lagrange[1]) seine neue Variationsmethode auf das Problem der Fläche kleinsten Inhalts bei gegebener Begrenzung angewandt und die Aufgabe bis zur Aufstellung der partiellen Differentialgleichung der Minimalflächen geführt.

In Verallgemeinerung dieser Lagrangeschen Untersuchungen hat dann Euler[2]) 1770 den ersten Versuch einer allgemeinen Theorie der Extrema von Doppelintegralen gemacht. Er betrachtet ein Doppelintegral von der Form

$$J = \iint V(x, y, z, p, q, \ldots)\, dx\, dy \tag{1}$$

wo z eine Funktion der unabhängigen Variabeln x, y ist und

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad \ldots,$$

zwar nicht bei fester Begrenzung des gesuchten Flächenstücks, aber doch bei festem Integrationsbereich.

---

1) *Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales indéfinies,* Miscell. Taurin., Bd. II, 1760—1761, und Oeuvres de Lagrange, Bd. I, S. 353—356.

2) Institutiones calculi integralis, Bd. III, Appendix de calculo variationum (1770), Art. 159—174, Opera, Ser. I, vol. 13 (1914), S. 458—469.

Da hier nur die Funktion z variiert zu werden braucht, während sowohl die Grenzen wie die unabhängigen Variabeln unvariiert bleiben, so bietet die Aufstellung der ersten Variation von J keine Schwierigkeiten. Der in bekannter Weise erhaltene Ausdruck für δJ wird dann nach dem Vorgang von LAGRANGE mittels der der partiellen Integration zugrunde liegenden Formeln

$$(2) \qquad u\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial (uv)}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad u\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial (uv)}{\partial y} - v\frac{\partial u}{\partial y}$$

auf die Form gebracht

$$(3) \qquad \delta J = \iint \Omega\omega\, dx\, dy + \iint\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y}\right) dx\, dy.$$

Darin ist ω der unendlichkleine Zuwachs von z und

$$(4) \qquad \begin{cases} \Omega = N - \dfrac{\partial P}{\partial x} - \dfrac{\partial Q}{\partial y} \cdots, \\ A = P\omega + \cdots, \qquad B = Q\omega + \cdots, \end{cases}$$

wenn die partiellen Ableitungen von V nach $z, p, q, \ldots$ beziehungsweise mit $N, P, Q, \ldots$ bezeichnet werden.

Durch Ausführung je einer Integration in dem zweiten Doppelintegral wird dann gefolgert

$$(5) \qquad \iint\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y}\right) dx\, dy = \int A\, dy + \int B\, dx.$$

Aus dem Verschwinden von δJ wird nun geschlossen, dass das in δJ übrig bleibende Doppelintegral bei beliebiger Wahl von ω verschwinden muss, was zunächst auf die partielle Differentialgleichung des Problems

$$(6) \qquad \Omega = 0$$

und weiterhin auf die Grenzgleichung

$$(7) \qquad \int A\, dy - \int B\, dx = 0$$

führt.

Weitere Schlüsse aus dieser Gleichung (7) zu ziehen ist EULER nicht gelungen; er sagt darüber[3]:

---

3) *Methodus nova et facilis calculum variationum tractandi*, Novi Comment. Petropol. Bd XVI (1771), 1772, S. 53; abgedruckt in Institutiones calculi integralis, Bd. IV, 3. Aufl. (1845), S. 605.

»Verum quid haec singula membra (nämlich der Gleichung (7)) proprie significent et ad quemnam usum adhiberi queant, neutiquam adhuc perspicere licet, unde hoc argumentum cujus prima fundamenta etiamnunc vix jacta sunt censenda, omnem geometrarum attentionem atque multo accuratiorem investigationem postulare videtur, quod negotium vix ante suscipere licet, quam casus nonnulli particulares omni studio et diligentia fuerint evoluti«.

Und ein anderer guter Kenner der Variationsrechnung, BRUNACCI, bricht noch vierzig Jahre später, nachdem er in seinem *Corso di matematica sublime*[4]) die EULERschen Untersuchungen reproduziert hat, an derselben Stelle in die Klage aus:

»Siamo sopra una spiaggia da cui si scopre una mar senza fine, e non ci è dato per anche d'inoltrarvis', onde fare delle scoperte«.

In der Tat stehen wir hier vor einer der Hauptschwierigkeiten der Theorie der Extrema von Doppelintegralen, die fast sechzig Jahre lang den Fortschritt der Variationsrechnung nach dieser Richtung aufgehalten hat, und die erst durch GAUSS vollständig überwunden worden ist[5]).

2. Während bei mehrdimensionalen Variationsproblemen mit festem Integrationsbereich die Aufstellung der ersten Variation keinerlei Schwierigkeiten bietet, diese sich vielmehr erst bei der Umformung der ersten Variation durch partielle Integration einstellen, treten bei Problemen mit variablem Integrationsbereich, oder, was dasselbe ist, bei variabeln Grenzen, schon sofort bei der Aufstellung der ersten Variation erhebliche Schwierigkeiten auf. Zu ihrer Überwindung sind von Anfang an zwei wesentlich von einander verschiedene Methoden angewandt worden, die sich auch in ihrer weiteren Entwicklung scharf von einander getrennt gehalten haben: die Methode der Variation der Grenzen und die Methode der Variation der unabhängigen Variabeln.

Die Methode der Variation der Grenzen ist dadurch charakterisiert, dass bei ihr von vornherein das mehrfache Integral als Aufeinanderfolge ein-

---

4) Bd. IV, Florenz 1808, S. 248.

5) Auf eine zweite, mit der partiellen Integration verbundene Schwierigkeit, auf die ebenfalls bereits EULER gestossen ist, und die erst durch POISSON ihre Erledigung gefunden hat, gehen wir hier nicht ein, da sie erst eintritt, wenn unter dem Integral auch die zweiten Ableitungen von z vorkommen, was bei dem GAUSSschen Problem nicht der Fall ist. Vgl. hierüber TODHUNTER, *A history of the progress of the calculus of variations during the nineteenth century,* Cambridge 1861, Art. 27—29.

facher Integrale mit fester Integrationsordnung aufgefasst wird, und dass die unbekannten Funktionen und die Grenzen, nicht aber die unabhängigen Variabeln variiert werden. Demgegenüber liegt der Methode der Variation der unabhängigen Variabeln bewusst oder unbewusst die Auffassung des mehrfachen Integrals als Grenze einer Summe zugrunde, und es werden die unbekannten Funktionen und die unabhängigen Variabeln, nicht aber die Grenzen variiert. Die Methode der Variation der Grenzen ist die nächstliegende, begrifflich einfachere; sie hat rein analytischen Charakter und ist schon frühzeitig mit Klarheit und Präzision und fehlerfrei durchgeführt worden. Die Methode der Variation der unabhängigen Variabeln dagegen hat sich in näherem Zusammenhang mit der Anschauung gehalten; sie ist jedoch von ihrem ersten Auftreten bei LAGRANGE an mit Unklarheiten und Missverständnissen belastet gewesen, die vielfach zu direkten Fehlern geführt haben. Diesen Nachteilen stehen aber auch entscheidende Vorteile gegenüber: Die Methode der Variation der unabhängigen Variabeln ist nicht nur für die Behandlung geometrischer Aufgaben die geeignetere, sondern man kann geradezu sagen, dass die Methode der Variation der Grenzen, wenigstens in der Form, in der sie sich geschichtlich weiterentwickelt hat, für eine befriedigende Lösung geometrischer Aufgaben untauglich ist (siehe unten Nr. 5).

3. Obwohl GAUSS sich der Methode der Variation der unabhängigen Variabeln bedient, so ist es der Vollständigkeit halber doch erforderlich, einiges über die Methode der Variation der Grenzen vorauszuschicken.

Der Grundgedanke der Methode kommt schon bei LAGRANGE[6]) vor in einem Brief an EULER vom 20. November 1755 und zwar bei der Lösung des Problems der Brachistochrone von einem gegebenen Punkt nach einer gegebenen Kurve.

Aber erst siebzig Jahre später (1825) ist die Methode von OHM[7]) systematisch durchgeführt und auch auf Doppelintegrale angewandt worden. Dabei ist zunächst die Sorgfalt hervorzuheben, die OHM im Gegensatz zu seinen Vorgängern auf die Bezeichnung verwendet. So hat er bereits — siebzehn Jahre vor SARRUS — ein einfaches und ein doppeltes Substitutionszeichen, und die Grenzen der bestimmten Integrale werden stets angegeben, ebenso die

6) Oeuvres de LAGRANGE, Bd. XIV, S. 147—149.

7) MARTIN OHM, *Die Lehre vom Grössten und Kleinsten*, Berlin 1825.

Integrationsordnung bei Doppelintegralen. Dieser sorgfältigen Bezeichnung ist es nun auch zum grossen Teil zuzuschreiben, dass OHM bei der Variation der Doppelintegrale ganz wesentlich über seine Vorgänger EULER und LAGRANGE hinausgekommen ist.

OHM legt seinen Untersuchungen die EULERsche Auffassung der Variation als Differentiation nach einem Parameter zugrunde. Dem entsprechend werden in dem zu variierenden Doppelintegral

$$J = \int_{x_0}^{x_1} \left(\int_{y_0(x)}^{y_1(x)} V\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \cdots\right) dy \right) dx \tag{8}$$

die Grössen:

$$z(x,y), \quad y_0(x), \quad y_1(x), \quad x_0, \quad x_1$$

durch Funktionen eines Parameters $\varkappa$:

$$\bar{z}(x, y, \varkappa), \quad \bar{y}_0(x, \varkappa), \quad \bar{y}_1(x, \varkappa), \quad \bar{x}_0(\varkappa), \quad \bar{x}_1(\varkappa)$$

ersetzt, die sich für $\varkappa = 0$ auf die vorigen reduzieren. Das so entstehende Integral $\bar{J}$ wird dann nach $\varkappa$ differentiiert und dann $\varkappa = 0$ gesetzt. Durch zweimalige Anwendung der Regel für die Differentiation eines bestimmten Integrals nach einem Parameter ergibt sich die folgende erste Fundamentalformel von OHM[8]):

$$\begin{aligned} \delta J = \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} \delta V \, dy \, dx + \int_{x_0}^{x_1} \delta y_1 \Big|^{y_1} V dx - \int_{x_0}^{x_1} \delta y_0 \Big|^{y_0} V dx \\ + \delta x_1 \Big|^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} V dy - \delta x_0 \Big|^{x_0} \int_{y_0}^{y_1} V dy. \end{aligned} \tag{9}$$

Dabei haben wir von dem einfachen Substitutionssymbol in der aus dem LINDELÖF-MOIGNOschen Lehrbuch[8a]) bekannten Form Gebrauch gemacht, und das Symbol δ bedeutet allgemein die Operation

$$\delta\varphi = \left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \varkappa}\right)_{\varkappa = 0}.$$

8) OHM, loc. cit. 7), S. 121, 122. OHM selbst leitet die Formel (9) durch zweimalige Anwendung der von ihm vorher bewiesenen entsprechenden Formel für einfache Integrale ab.

8a) F. MOIGNO, L. LINDELÖF, *Leçons sur le calcul différentiel et intégral,* IV, Calcul des Variations, Paris 1861.

Mit der Formel (9) war die Aufgabe der **Aufstellung** der ersten Variation für Doppelintegrale mit variablen Grenzen gelöst.

4. Von fast noch grösserer Wichtigkeit ist die **Umformung**, die nunmehr OHM mit dem in der Formel (9) auftretenden Doppelintegral vornimmt, nachdem er dasselbe zunächst auf die Form (3) gebracht hat. — Die Schwierigkeit, aus der Gleichung (7) weitere Folgerungen zu ziehen, hatte im wesentlichen darin bestanden, dass in den beiden einfachen Integralen auf der linken Seite nach verschiedenen Variabeln und zwischen verschiedenen Grenzen integriert wird. Um diesem Übelstand abzuhelfen, macht OHM von der folgenden Formel Gebrauch, die sich unmittelbar aus der Regel für die Differentiation eines bestimmten Integrals nach einem Parameter ergibt,

$$\text{(10)} \quad \int_{y_0}^{y_1} \frac{\partial A(x,y)}{\partial x}\, dy = \frac{d}{dx}\int_{y_0}^{y_1} A(x,y)\, dy - A(x, y_1)\frac{dy_1}{dx} + A(x, y_0)\frac{dy_0}{dx}.$$

Hiernach erhält man an Stelle der EULERschen Formel (5) die folgende

$$\text{(11)} \quad \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\left(\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}\right) dy\, dx = \Big|_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} A\, dy + \int_{x_0}^{x_1}\Big|_{y_0}^{y_1}\left(B - A\frac{dy}{dx}\right) dx,$$

wobei wir zur Abkürzung ausser von dem CAUCHYschen Doppel-Substitutionszeichen noch von der LINDELÖFschen Bezeichnung

$$\text{(12)} \quad \Big|_{y_0}^{y_1} A\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx}\Big|^{y_1} A - \frac{dy_0}{dx}\Big|^{y_0} A$$

Gebrauch gemacht haben.

Die Anwendung der Formel (11) auf das in (9) vorkommende Doppelintegral liefert für den einfachsten Fall, wo in dem Integral J keine höheren als die ersten Ableitungen der Funktion z vorkommen, die folgende **zweite Fundamentalformel von OHM**[9]):

$$\text{(13)} \quad \begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} \delta V\, dy\, dx &= \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1}\left(N - \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right)\omega\, dy\, dx \\ &+ \Big|_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} P\omega\, dy + \int_{x_0}^{x_1}\Big|_{y_0}^{y_1}\left(Q - P\frac{dy}{dx}\right)\omega\, dx. \end{aligned}$$

9) OHM, loc. cit. 7), S. 306; bereits TODHUNTER hat auf die Formel (13) von OHM aufmerksam gemacht, loc. cit. 5), S. 32.

Der Ausdruck, der sich nunmehr durch Kombination von (9) und (13) für δJ ergibt, hat die folgenden beiden Eigenschaften:

1) Die Integrationen und Substitutionen werden in allen Gliedern von δJ in derselben festen Reihenfolge ausgeführt.

2) In keinem Glied kommt unter einem Integralzeichen eine nach der Integrationsvariabeln genommene partielle Ableitung von ω vor.

Das sind aber gerade die beiden charakteristischen Eigenschaften der Normalform, auf die SARRUS in seiner Preisarbeit[10] die erste Variation eines beliebigen n-fachen Integrals gebracht hat. OHM hat also mit den beiden Formeln (9) und (13) für den einfachsten Typus von Doppelintegralen die SARRUSschen Resultate bereits vorweggenommen.

Damit war OHM sehr nahe an die Ableitung der »Randbedingungen« herangekommen; den letzten Schritt jedoch, die Aufstellung eines »Fundamentallemmas«, das ihm gestattet hätte, alle Folgerungen aus dem Verschwinden der ersten Variation zu ziehen, hat er nicht gemacht. Er hat zwar auch nach dieser Richtung Untersuchungen angestellt: dieselben haben aber zu keinem befriedigenden Ergebnis geführt[11]. — In seiner grossen Preisarbeit (1842) hat dann SARRUS dieselbe Methode der Variation der Grenzen systematisch und mit grösster Konsequenz auf beliebige vielfache Integrale ausgedehnt und die ganze Theorie durch sein »allgemeines Fundamentallemma«[12] erst zum vollen Abschluss gebracht. Auch die gleichzeitige Preisarbeit von DELAUNAY[13] bedient sich der Methode der Variation der Grenzen und ebenso die beiden wichtigsten Lehrbücher der Variationsrechnung des neunzehnten Jahrhunderts, JELLETT[13a] und LINDELÖF-MOIGNO[8a], die sich bezw. an DELAUNAY und SARRUS anlehnen.

5. Die Methode der Variation der Grenzen, wie sie von OHM und SARRUS ausgebildet worden ist, lässt an Klarheit und Einfachheit nichts zu wünschen

10) *Recherches sur le calcul des variations,* eingereicht 1842, jedoch erst 1848 veröffentlicht in den Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences (Paris), Bd. X, S. 1—128.

11) OHM, loc. cit. 7), S. 75—80; der allgemeine Satz auf S. 79 ist unrichtig.

12) SARRUS, loc. cit. 10), S. 55—84.

13) *Mémoire sur le calcul des variations,* eingereicht 1842, veröffentlicht 1843 im Journal de l'École Polytechnique, Cahier 29, S. 37—120.

13a) J. H. JELLETT, *An elementary treatise on the calculus of variations,* Dublin 1850; deutsch von C. H. SCHNUSE, Braunschweig 1860.

übrig. Sie leidet aber an einer Schwäche, auf die wir schon oben angespielt haben (Nr. 2), und die zu Tage tritt, sobald man die Methode auf geometrische Aufgaben anwenden will. Man sehe sich z. B. die geradezu ungeheuerlichen Formeln an, die SARRUS[14]) nötig hat, um das einfache Problem des Körpers von grösstem Volumen bei gegebener Oberfläche zu behandeln.

Der Grund dieser Schwäche scheint mir darin zu liegen, dass die Aufgabe, die durch die OHM-SARRUSsche Methode gelöst wird, im allgemeinen für die Geometrie kein Interesse hat, während umgekehrt die Aufgaben, die für die Geometrie Interesse haben, nicht unter die OHM-SARRUSsche Theorie fallen. Denn der Integrationsbereich des Integrals (8) ist der durch die Geraden AB: $x = x_0$, CD: $x = x_1$ einerseits und die beiden Kurven AC: $y = y_0(x)$, BD: $y = y_1(x)$ andererseits eingeschlossene Bereich der x, y-Ebene, wobei $x_0 < x_1$ und $y_0(x) \gtreqless y_1(x)$ für $x_0 \lesseqgtr x \lesseqgtr x_1$ vorausgesetzt wird. Einen solchen Bereich wollen wir der Kürze halber einen »Elementarbereich« nennen.

Dann ist auch für das variierte Integral $\bar{J}$ der Integrationsbereich ein Elementarbereich $\bar{A}\bar{C}\bar{D}\bar{B}$ und die Aufgabe, mit deren Lösung sich die Methode der Variation der Grenzen beschäftigt, lautet in geometrischer Fassung (für den Fall des Doppelintegrals):

Unter allen Flächenstücken: $z = z(x, y)$, deren Projektionen auf die x, y-Ebene Elementarbereiche sind, dasjenige zu bestimmen, das ein Extremum für das Doppelintegral J liefert.

Diese Beschränkung auf Elementarbereiche erscheint aber vom geometrischen Standpunkt aus durchaus unnatürlich und gekünstelt, und wird wohl nur in den seltensten Fällen einmal bei einer aus der Geometrie selbst entsprungenen Aufgabe auftauchen.

Man kann nun versuchen, diesem Mangel dadurch abzuhelfen, dass man dem Elementarbereich die Bedingung auferlegt, dass die Punkte A und B, C und D zusammenfallen sollen, und dass überdies die beiden Kurven $y = y_0(x)$ und $y = y_1(x)$ die Ordinaten $x = x_0$ und $x = x_1$ in den Punkten $A = B$, bezw. $C = D$ berühren, und analog für die variierten Kurven.

Dann tritt aber der Übelstand ein, dass die Ableitungen dy_0/dx und dy_1/dx für die Werte $x = x_0$ und $x = x_1$ unendlich werden. Das macht sich zwar

14) SARRUS, loc. cit. 10), S. 102—114.

bei der Ableitung der Formel (9) noch nicht geltend, macht aber die Umformung der ersten Variation durch partielle Integration, — wenigstens in der Form, wie sie von OHM, SARRUS und DELAUNAY gehandhabt worden ist —, hinfällig. Das ist ein Einwand, der auch die sonst so vortrefflichen Lehrbücher von JELLETT und LINDELÖF-MOIGNO unbefriedigend erscheinen lässt, soweit es sich um geometrische Anwendungen der Variationsrechnung handelt.

Die Lösung der hier vorliegenden Schwierigkeit wird einerseits durch Einführung des Begriffs des Linienintegrals, andererseits durch die Methode der Variation der unabhängigen Variabeln geliefert, zu deren Betrachtung wir nunmehr übergehen.

6. Die Methode der Variation der unabhängigen Variabeln knüpft unmittelbar an die Definition des δ-Algorithmus an, die LAGRANGE[15] in seiner ersten Veröffentlichung (1760/1) über Variationsrechnung zunächt für einfache Integrale gegeben hat:

Unter Z wird eine beliebige Funktion der Variabeln x, y, z und einer Anzahl ihrer Differentiale verstanden und dann δZ definiert als das Differential dieser Funktion Z in Bezug auf die als unabhängige Variable betrachteten Grössen $x, y, z, dx, dy, dz, d^2x, d^2y, d^2z, \ldots$ Dazu kommen dann die Gleichungen

$$\delta \int Z = \int \delta Z,$$
$$\delta dx = d\delta x, \quad \delta d^2 x = d^2 \delta x, \quad \ldots$$

Es unterliegt keinem Zweifel, dass LAGRANGE sich dabei die Variabeln x, y, z als Funktionen einer unbestimmt gelassenen unabhängigen Hilfsvariabeln, die wir t nennen wollen, gedacht hat, obgleich er dies nirgends ausdrücklich ausgesprochen hat. Daher kann man bei LAGRANGE streng genommen noch nicht von einer Variation der unabhängigen Variabeln sprechen, insofern bei ihm x, y, z gleichberechtigt auftreten und die wahre unabhängige Variable t nicht variiert wird.

Etwas anders liegen die Dinge bereits bei EULER[16], der in den *Institutiones calculi integralis* (1770) eine ausführliche und systematische Darstellung und

---

15) LAGRANGE, loc. cit. 1), S. 336. Es verdient jedoch hervorgehoben zu werden, dass LAGRANGE in seinen ersten brieflichen Mitteilungen über seine Entdeckung an EULER vom Jahre 1755 die Variable x noch nicht variiert, vgl. LAGRANGE, loc. cit. 6), S. 140, 148.

16) EULER, loc. cit. 2), Art. 1—174.

Weiterführung der LAGRANGEschen Variationsmethode gegeben hat. Da er im Gegensatz zu LAGRANGE das zu variierende Integral im einfachsten Fall in der Form

$$U = \int V(x, y, p, q, \ldots) dx,$$
$$p = \frac{dy}{dx}, \quad q = \frac{dp}{dx}, \quad \ldots$$

annimmt, so erscheint die Variable x so ausgesprochen in der Rolle der unabhängigen Variabeln, dass man bei EULER füglich von einer Variation der unabhängigen Variabeln reden kann, wenn er selbst sich auch x und y als Funktionen einer Hilfsvariabeln gedacht haben mag, wofür mancherlei Anzeichen sprechen.

Nun hat zwar einerseits EULER durch geometrische Deutung des Variationsprozesses dem LAGRANGEschen Algorithmus einen mehr konkreten Inhalt zu geben gesucht, andererseits hat er aber doch auch zu einer rein mechanischen Anwendung des δ-Prozesses beigetragen; so, wenn er z. B. ohne jede weitere Begründung schreibt

$$\delta U = \int \delta(V dx) = \int (\delta V dx + V \delta dx),$$

oder wenn er die Gleichung

$$\delta\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dx\,\delta dy - dy\,\delta dx}{dx^2} = \frac{d\delta y}{dx} - \frac{dy}{dx}\,\frac{d\delta x}{dx}$$

mit den Worten begründet[17]: »Variatio quaesita δp per notas differentiationis regulas reperitur, dummodo loco signi differentiationis ∂ scribatur signum variationis δ«. Ganz unverhüllt ist dann später diese wörtliche, rein mechanische Anwendung der LAGRANGEschen Definition des δ-Algorithmus, — für die wir in der Folge die Bezeichnung »*formale Variation*« gebrauchen werden — bei der die Bedeutung der Operation vollständig hinter dem Algorithmus zurückgetreten ist, und bei der keinerlei Bezugnahme auf eine Hilfsvariable mehr erkennbar ist, bei LACROIX[18]) aufgetreten und hat von da aus den unheilvollsten Einfluss auf die Weiterentwicklung der Variationsrechnung ausgeübt. Denn diese wörtliche Anwendung der LAGRANGEschen Definition des δ-Algorithmus

---

17) EULER, loc. cit. 2), Art. 45.

18) *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral,* Bd. II, 2. Aufl., Paris 1814. Vgl. insbesondere Art. 845, 861, 862.

bei gleichzeitiger Variation der unabhängigen Variabeln ist falsch, wie schon die direkte Anwendung auf die zweite Ableitung d^2y/dx^2 zeigt, und sie musste, konsequent durchgeführt, früher oder später zu falschen Resultaten führen, wie dies denn auch bei der Variation der Doppelintegrale tatsächlich eingetreten ist.

7. Der erste Versuch, die Methode der Variation der unabhängigen Variabeln auf zweidimensionale Probleme anzuwenden, rührt von EULER[19] (1770) her. Er deutet den Variationsprozess geometrisch: den Variabeln x, y, z, die als rechtwinklige Koordinaten eines Punktes einer Fläche $z = z(x, y)$ aufgefasst werden, werden unendlich kleine Zuwächse $\delta x, \delta y, \delta z$ erteilt, die Funktionen der beiden unabhängigen Variabeln x, y sind. Dadurch entsteht eine der ersten unendlich benachbarte Fläche, wobei zugleich dem Punkt x, y, z der ursprünglichen Fläche der Punkt $x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z$ der zweiten Fläche zugeordnet ist.

Es kommt nun zunächst auf die Berechnung der Variation der partiellen Ableitungen

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

an. EULER schliesst aus der Bedeutung von δp, dass

$$\delta p = \frac{\partial(z + \delta z)}{\partial(x + \delta x)} - \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z + \partial \delta z}{\partial x + \partial \delta x} - \frac{\partial z}{\partial x}$$

und erhält daraus durch Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen höherer Ordnung

$$\delta p = \frac{\partial \delta z}{\partial x} - p \frac{\partial \delta x}{\partial x} \tag{14}$$

und die analoge Formel für δq.

Das ist dasselbe Resultat, dass sich auch durch rein mechanische Anwendung des δ-Algorithmus nach der Formel

$$\delta\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial x\, \delta \partial z - \partial z\, \delta \partial x}{\partial x^2}$$

unter Benutzung der Gleichungen $\delta \partial x = \partial \delta x$, $\delta \partial z = \partial \delta z$ ergeben haben würde,

19) EULER, loc. cit. 2), Art. 141—149.

und in der Tat haben später LAGRANGE[20]) und LACROIX[21]) die Formel (14) auf diese Weise abgeleitet.

Aus den Formeln für δp, δq leitet dann EULER die Variationen der zweiten partiellen Ableitungen her, indem er diese schreibt

$$r = \frac{\partial p}{\partial x}, \quad s = \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}, \quad t = \frac{\partial q}{\partial y}.$$

Die Variation von δs kann man dabei auf zwei verschiedenen Wegen erhalten, die jedoch zu verschiedenen Resultaten führen. Um den Widerspruch aufzuklären, sucht nun EULER nachzuweisen, dass δx nur von x, δy nur von y abhängen dürfen. Bei dieser spezialisierenden Annahme fallen dann die beiden verschiedenen Werte von δs zusammen.

Aber EULER traut der Sache selbst nicht recht; er schreibt: »Omnibus autem dubiis in hac investigatione felicissime occurremus, si soli quantitati z variationes tribuamus, binis reliquis x et y plane invariatis relictis, ita ut sit tam $\delta x = 0$ quam $\delta y = 0$«. Er gibt daher, um sicher zu gehen, bei der weiteren Behandlung der Doppelintegrale, über die wir bereits in Nr. 1 berichtet haben, die Variation der unabhängigen Variabeln x, y auf und variiert nur die Funktion z; und dabei ist er auch in seiner späteren Arbeit[22]) vom Jahr 1771 geblieben. Damit hat er sich freilich, da er auch die Grenzen nicht variiert, den Zugang zu Problemen mit variablem Integrationsbereich versperrt, für die übrigens die Zeit ohnehin nicht reif war. —

Die Überlegungen, durch die EULER zu beweisen sucht, dass man δx als nur von x, δy nur von y abhängig annehmen müsse, sind nicht stichhaltig, und der wahre Grund des Widerspruchs der beiden Ausdrücke für δs liegt darin, dass schon die EULERschen Formeln für δp, δq falsch sind. Den Fehler in EULERS Schlussweise hat erst M. OSTROGRADSKY[23]) (1834) aufgedeckt.

Zugleich bestätigt sich hier, dass die oben als »formale Variation« bezeichnete rein mechanische Anwendung des δ-Algorithmus bei gleichzeitiger Variation der unabhängigen Variabeln, unter Umständen zu direkt falschen

20) Oeuvres de LAGRANGE, Bd. XI, S. 105: »On aura, en différentiant« (nämlich mit dem Symbol δ).

21) LACROIX, loc. cit. 18), Art. 861: »différentiant ces fractions à la manière ordinaire, et changeant un d en δ«.

22) EULER, loc. cit. 3).

23) *Mémoire sur le calcul des variations des intégrales multiples,* Journal für r. u. a. Math., Bd. 15 (1836), S. 334.

Resultaten führen kann, und daher eine ohne genaue Feststellung der Grenzen ihrer Anwendbarkeit unzulässige Operation ist.

8. Nach diesem ersten missglückten Versuch von EULER ist erst vierzig Jahre später das Problem der Variation von Doppelintegralen bei variablem Integrationsbereich wieder aufgenommen worden und zwar von LAGRANGE[24] selbst in einem kurzen Exkurs über Variationsrechnung in der zweiten Auflage der *Mécanique analytique* (1811).

Es handelt sich darum, die erste Variation des Doppelintegrals

$$J = \iint V(x, y, z, p, q, \dots)\, dx\, dy$$

bei gleichzeitiger Variation von x, y, z zu berechnen. Dabei macht LAGRANGE dieselbe spezialisierende Annahme wie EULER, dass δx nur von x, δy nur von y abhängt, dass somit

$$\frac{\partial \delta x}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \delta y}{\partial x} = 0, \tag{15}$$

ohne jedoch zu behaupten, dass diese Einschränkung notwendig sei, sondern nur »um die Rechnung zu vereinfachen«. Es kommt nun vor allem wieder auf die Berechnung von δp, δq an. Nachdem LAGRANGE, wie bereits oben erwähnt, die EULERsche Formel (14) für δp durch »formale Variation« abgeleitet hat, formt er dieselbe dadurch um, dass er das unter der speziellen Voraussetzung (15) verschwindende Glied

$$-q \frac{\partial \delta y}{\partial x}$$

hinzufügt. So erhält er für δp, δq die Ausdrücke

$$\left\{ \begin{aligned} \delta p &= \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} \delta x + \frac{\partial q}{\partial x} \delta y, \\ \delta q &= \frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} \delta x + \frac{\partial q}{\partial y} \delta y, \end{aligned} \right. \tag{16}$$

wo nunmehr

$$\omega = \delta z - p \delta x - q \delta y. \tag{17}$$

Aus den Formeln für δp, δq leitet er dann sehr einfache und übersichtliche Ausdrücke für die Variationen der höheren Ableitungen von z her, mit deren

24) Oeuvres de LAGRANGE, Bd. XI, S. 103—110.

Hilfe er nunmehr δV auf die einfache Form bringen kann

$$(18) \qquad \delta V = \frac{\partial V}{\partial x}\delta x + \frac{\partial V}{\partial y}\delta y + N\omega + P\frac{\partial \omega}{\partial x} + Q\frac{\partial \omega}{\partial y} + \cdots.$$

Weiter gibt LAGRANGE ohne weitere Erläuterung, also doch wohl auf Grund »formaler Variation«, für die Variation des Integrals J den Ausdruck

$$(19) \qquad \delta J = \iint \delta(V\,dx\,dy) = \iint (dx\,dy\,\delta V + V\,\delta(dx\,dy)).$$

Die nächste Schwierigkeit ist die Berechnung von $\delta(dx\,dy)$. Hier geht LAGRANGE auf die geometrische Bedeutung von $dx\,dy$ als Flächeninhalt des Rechtecks mit den Eckenkoordinaten

$$x,\ y;\quad x+dx,\ y;\quad x,\ y+dy;\quad x+dx,\ y+dy$$

zurück und erhält

$$(20) \qquad \delta(dx\,dy) = \left(\frac{\partial\,\delta x}{\partial x} + \frac{\partial\,\delta y}{\partial y}\right)dx\,dy.$$

Die Formel (19) geht nunmehr über in

$$(21) \qquad \delta J = \iint\left(\delta V - \frac{\partial V}{\partial x}\delta x - \frac{\partial V}{\partial y}\delta y\right)dx\,dy + \iint\left(\frac{\partial(V\delta x)}{\partial x} + \frac{\partial(V\delta y)}{\partial y}\right)dx\,dy;$$

dabei sind, — ebenso wie auch schon in (18) —, vor Ausführung der Differentiationen nach x und y die Grössen $z, p, q, \ldots$ als Funktionen von x, y in V eingesetzt zu denken.

Diese Formel ist für die Methode der Variation der unabhängigen Variabeln das Gegenstück zu der Fundamentalformel (9) von OHM; wir werden sie die LAGRANGEsche Fundamentalformel nennen. Sie ist später von OSTROGRADSKY[25]) (1834) und G. M. PAGANI[26]) (1834) auf n-fache Integrale verallgemeinert worden.

Das Einsetzen des Wertes (18) von δV liefert nun unter Benutzung der Formeln (2) für δJ das Schlussresultat[27]):

$$(22) \qquad \delta J = \iint \Omega\,\omega\,dx\,dy + \iint\left(\frac{\partial(A+V\delta x)}{\partial x} + \frac{\partial(B+V\delta y)}{\partial y}\right)dx\,dy,$$

25) OSTROGRADSKY, loc. cit. 23), S. 339, 340.

26) *Résolution d'un problème relatif au calcul des variations*, Journal für r. u. a. Mathematik, Bd. 15 (1836), S. 84 ff., insbes. S. 92.

27) LAGRANGE schreibt übrigens dieses Schlussresultat gar nicht explizite hin, ebensowenig wie die explizite Formel (21); er begnügt sich, den Gang der dazu führenden Rechnung angegeben zu haben.

wobei die Grössen Ω, A, B, ω durch die Gleichungen (4) und (17) definiert sind.

Die Formel (22) ist das genaue Analogon einer entsprechenden, von EULER[28]) für einfache Integrale bewiesenen Formel, die vermutlich LAGRANGE bei seiner Untersuchung, insbesondere bei seiner Ableitung der Formeln (16) als Wegweiser gedient hat.

Auf die weitere Behandlung des zweiten Doppelintegrals in (22) ist LAGRANGE nicht eingegangen; es genügt ihm, festzustellen, dass dieses bei fester Begrenzung verschwindet, da es ihm bei der ganzen Ableitung lediglich darauf ankommt zu beweisen, dass man bei gleichzeitiger Variation von x, y, z zu derselben partiellen Differentialgleichung kommt, wie bei alleiniger Variation von z.

9. LAGRANGE hatte die Formel (16) für δp, δq und damit auch das Schlussresultat (22) nur unter der dem Problem selbst durchaus fernliegenden beschränkenden Voraussetzung (15) abgeleitet, und überdies hat er dabei die fragwürdige Operation der »formalen Variation« angewandt.

Die hier noch vorliegende Lücke wurde bald darauf (1816) von POISSON[29]) ausgefüllt. Er leitet zunächst mit LAGRANGE die Formel (19) mittels »formaler Variation« ab. Dann aber führt er an Stelle von x, y zwei Hilfsvariable u, v als unabhängige Variable ein. Dadurch gehen dann auch z und die partiellen Ableitungen

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

in Funktionen von u, v über. Jetzt werden die Funktionen x, y, z von u, v variiert, während u, v unvariiert bleiben. Dann ergeben sich die Variationen von δp, δq zunächst als Funktionen von u, v und weiterhin, indem man von den Variabeln u, v zu den alten Variabeln x, y zurückkehrt, als Funktionen von x, y. Am einfachsten geschieht dies, indem man direkt $x = u$, $y = v$ setzt, was keine Beschränkung der Allgemeinheit ist.

Als Resultat erhält POISSON die LAGRANGEschen Ausdrücke (16) für δp, δq,

---

28) EULER, loc. cit. 2), Art. 86.

29) *Sur le calcul des variations, relativement aux intégrales multiples*, Bulletin des Sciences, par la Société Philomatique de Paris, Année 1816, S. 82—86; wiedergegeben in LACROIX, *Traité etc.*, Bd. III (1819), S. 717—721.

von denen nunmehr bewiesen ist, dass sie nicht nur unter der beschränkenden Voraussetzung (15), sondern ganz allgemein giltig sind.

Zugleich ergab sich eine Bestätigung der von LAGRANGE durch eine geometrische Infinitesimalbetrachtung erhaltenen Formel (20) für die Variation des Flächenelementes, das jetzt die Form

$$dx\,dy = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)du\,dv$$

annimmt.

Aber die grundsätzliche Bedeutung der Arbeit von POISSON reicht weit über die angeführten Verbesserungen der Untersuchungen von LAGRANGE hinaus, insofern sie die Mittel liefert, die Berechnung der Variation des Doppelintegrals von der anfechtbaren Operation der »formalen Variation« ganz frei zu machen. Zwar hat POISSON in dieser ersten Arbeit bei Ableitung der Gleichung (19) noch keinen Gebrauch davon gemacht. Aber vorgreifend wollen wir doch schon hier erwähnen, dass er in seiner spätern grossen Arbeit »*Mémoire sur le calcul des variations*«[30] (1831) auch diesen letzten Rest der »formalen Variation« beseitigt hat, indem er die unabhängigen Variabeln u, v gleich in das Integral J einführt. Dasselbe geht dann über in

$$J = \iint V\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)du\,dv, \tag{24}$$

erstreckt über einen gewissen Bereich im Gebiet der Variabeln u, v. Nunmehr werden x, y, z durch $x+\delta x$, $y+\delta y$, $z+\delta z$ ersetzt, wobei δx, δy, δz willkürliche unendlich kleine Funktionen von u, v sind, während u, v auf denselben Bereich beschränkt werden wie im Integral J. Auf diese Weise kann man von einem gegebenen Flächenstück zu einem beliebigen benachbarten übergehen, ohne den Integrationsbereich zu ändern. Bei der Variation von J hat man daher jetzt weder die Grenzen noch die unabhängigen Variabeln zu variieren, sondern einzig die Funktionen x, y, z, was keinerlei begriffliche Schwierigkeiten mehr bietet.

Damit waren endlich die mit der Variation der unabhängigen Variabeln verbundenen Schwierigkeiten und Unklarheiten aus dem Wege geräumt, frei-

---

30) Mémoires de l'Académie royale des Sciences de l'Institut de France, Bd. XII (1833), S. 287—293. Datiert ist die Arbeit vom 10. November 1831.

lich nur dadurch, dass überhaupt der ganze Begriff der Variation der unabhängigen Variabeln beseitigt wurde.

Auf die mit der partiellen Integration verbundenen Schwierigkeiten ist auch POISSON in seiner Arbeit von 1816 nicht eingegangen. Er begnügt sich mit der EULERschen Gleichung (5) und das Problem der Randbedingung blieb ungelöst.

Ein schlagendes Licht auf die hier noch vorliegende Lücke wirft die Diskussion, die sich an die von GERGONNE in demselben Jahr 1816 gestellte Aufgabe geknüpft hat[31]: Einen Würfel in der Art in zwei Teile zu schneiden, dass die Schnittfläche durch zwei nicht parallele Diagonalen zweier gegenüberliegender Würfelflächen geht und einen möglichst kleinen Flächeninhalt besitzt. Als Lösung gab TÉDÉNAT[31a] eine Schraubenfläche an. GERGONNE äussert Bedenken gegen die Richtigkeit dieser Lösung. Aber zum direkten Nachweis ihrer Unrichtigkeit fehlten ihm noch die Hilfsmittel, da ihm selbst für dieses denkbar einfachste Beispiel, das sich ohne Variation der Grenzen erledigen liess[32], die Randbedingung unbekannt war, die hier darin besteht, dass die gesuchte Fläche in den nicht vorgegebenen Teilen ihrer Begrenzung die Wände des Würfels senkrecht schneiden muss.

II. Abschnitt: Die »Principia generalia theoriae figurae fluidorum in statu aequilibrii«.

10. Die beiden Fundamentalformeln (9) und (13) von OHM einerseits und die von POISSON bewiesene LAGRANGEsche Formel (22) andererseits bezeichnen die äussersten Punkte, welche die Theorie der Variation mehrfacher Integrale erreicht hatte, als GAUSS mit seiner Arbeit *Principia generalia theoriae figurae fluidorum in statu aequilibrii*[33], in die Variationsrechnung eingriff. In dieser Arbeit leitet GAUSS aus dem Prinzip der virtuellen Verrückungen für das Gleich-

31) Annales de Mathématiques pures et appliquées, Bd. VII (1816/7), S. 99, 148—155, 283—287, 284/5 Fussnote.

31a) Ebenda, S. 283.

32) Vgl. die Bemerkungen von H. A. SCHWARZ zur GERGONNEschen Aufgabe, Monatsberichte der Berliner Akademie, 1872, S. 3 ff., Gesammelte Abhandlungen, Bd. I, S. 126—129.

33) Der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften vorgelegt am 28. September 1829, veröffentlicht als Sonderausgabe 1830 und in den Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores. Vol. VII (1832), Class. math. S. 39—88, Werke, Bd. V, S. 29—77.

gewicht einer homogenen, inkompressibeln Flüssigkeit, deren Bewegungsfreiheit durch einen unbeweglichen starren Körper (Gefäss) beschränkt ist, und auf deren Teilchen, ausser der Schwerkraft, einerseits die gegenseitige Anziehung der Flüssigkeitsteilchen, andererseits die Anziehung der Teilchen des Gefässes wirken, die folgende Bedingung ab:

Es bezeichne s das Volumen der Flüssigkeit, T den Inhalt desjenigen Teiles der Oberfläche der Flüssigkeit, der das Gefäss berührt, U den Inhalt des andern (freien) Teiles der Oberfläche der Flüssigkeit, z den vertikalen Abstand eines Punktes der Flüssigkeit über einer festen horizontalen Ebene, endlich α, β zwei positive physikalische Konstanten. Alsdann muss im Zustand des Gleichgewichts der Ausdruck

$$W = \int z\,ds + (\alpha^2 - 2\beta^2)\,T + \alpha^2 U \tag{25}$$

ein Minimum sein in Beziehung auf die Gesamtheit aller mit der Gestalt des Gefässes vereinbaren unendlich kleinen Formveränderungen der Flüssigkeit, bei denen ihr Volumen unverändert bleibt.

Nimmt man mit Gauss an, dass die freie Oberfläche der Flüssigkeit, die ebenso wie ihr Inhalt mit U bezeichnet wird, sich in rechtwinkligen Koordinaten in der Form $z = z(x, y)$ darstellen lässt, und macht man dieselbe Annahme für die Gefässwand und schreibt ihre Gleichung: $z = g(x, y)$, so lässt sich W durch die folgende Summe von Doppelintegralen ausdrücken

$$\begin{aligned} W = {} & \tfrac{1}{2}\iint [z^2 - g^2(x, y)]\,dx\,dy \\ & + (\alpha^2 - 2\beta^2)\iint \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2}\,dx\,dy \\ & + \alpha^2 \iint \sqrt{1 + p^2 + q^2}\,dx\,dy, \end{aligned} \tag{26}$$

während das vorgegebene Volumen ausgedrückt wird durch

$$s = \iint [z - g(x, y)]\,dx\,dy. \tag{27}$$

Der Integrationsbereich ist dabei die Projektion $\mathfrak{A}$ der freien Oberfläche U auf die x, y-Ebene.

Es handelt sich also um ein zweidimensionales isoperimetrisches Problem mit variablem Integrationsbereich, und Gauss hätte, wenn er von den Resultaten seiner Vorgänger hätte Gebrauch machen wollen, (vorausgesetzt dass er dieselben gekannt hat), für die Berechnung von δW und δs

von den fertig vorliegenden Formeln (9) und (13) von Ohm oder von der Formel (22) von Lagrange ausgehen können.

Gauss hat diesen Weg jedoch nicht eingeschlagen. Die Untersuchungen von Ohm scheinen ihm nicht bekannt gewesen zu sein, wie man wohl aus dem folgenden Satz (Art. 20) schliessen kann: »Sed quum calculus variationum integralium duplicium pro casu, ubi etiam limites tamquam variabiles spectari debent, hactenus parum excultus sit, hanc disquisitionem subtilem paullo profundius petere oportet«, sowie auch aus dem folgenden Passus, in dem Gauss der Methode der Variation der unabhängigen Variabeln vor der Methode der Variation der Grenzen den Vorzug gibt (Art. 21): »Si sufficeret, tales tantummodo mutationes considerare, pro quibus limes P semper invariatus, vel saltem in eadem superficie verticali maneret, manifesto soli coordinatae tertiae z variationem inducere oporteret, quo pacto problema longe facilius evaderet; sed quum problema maxima generalitate nobis ventilandum sit, in tali investigationis modo consideratio variabilitatis limitum in ambages incommodas concinnitatemque turbantes perduceret; quamobrem praestabit, statim ab initio omnes tres coordinatas variationi subiicere«.

Aber auch von den Lagrangeschen Formeln (21) und (22) macht Gauss keinen Gebrauch. Vielmehr hat er es vorgezogen, unabhängig von allen vorangegangenen Untersuchungen über die Variation von Doppelintegralen und unter Beiseitesetzung des ganzen Apparates des δ-Algorithmus unmittelbar aus der geometrischen Bedeutung der Integrale U, T, s, $\int z\,ds$ die Variation dieser Grössen zu berechnen.

Sehen wir nun zu, wie Gauss im einzelnen das von ihm gestellte Variationsproblem löst. Entsprechend den Hauptschwierigkeiten, denen wir in der Geschichte der Extrema von Doppelintegralen vor Gauss begegnet sind, werden wir dabei drei Etappen unterscheiden:

A) Die Aufstellung der ersten Variation,

B) Die Umformung der ersten Variation mittels partieller Integration,

C) Die Ableitung der partiellen Differentialgleichung und der Randbedingung.

Wir bemerken noch, dass Gauss auf eine Untersuchung der zweiten Variation nicht eingegangen ist[34], dieselbe überhaupt nicht erwähnt.

---

[34] Mit einer einzigen Ausnahme: In Art. 19 behandelt Gauss, ehe er das allgemeine Problem in Angriff nimmt, den speziellen Fall von kommunizierenden Röhren mit vertikalen zylindrischen Schenkeln.

A) Aufstellung der ersten Variation.

11. Für die Variationsrechnung weitaus am wichtigsten ist derjenige Teil der Gaussschen Untersuchung, der sich mit der Berechnung der Variation des Flächeninhalts U beschäftigt.

Die in der Form

$$z = z(x, y) \tag{28}$$

angenommene freie Oberfläche U wird in der Weise variiert, dass jeder Punkt x, y, z der Fläche durch einen benachbarten Punkt[35])

$$\bar{x} = x + \delta x, \quad \bar{y} = y + \delta y, \quad \bar{z} = z + \delta z \tag{29}$$

ersetzt wird, wobei δx, δy, δz »unbestimmte, aber unendlich kleine Funktionen von x und y« sind, deren erste partielle Ableitungen stillschweigend ebenfalls als unendlich klein vorausgesetzt werden.

Die so entstehende variierte Fläche, ebenso wie ihr Inhalt, möge mit $\bar{U}$ bezeichnet werden. Beide Flächenstücke U und $\bar{U}$ werden erhalten, wenn die unabhängigen Variabeln x, y ein und denselben Bereich der x, y-Ebene überstreichen, nämlich die Projektion $\mathfrak{A}$ des Flächenstücks U auf die x, y-Ebene.

Die Variation, — worunter immer die erste Variation verstanden wird —, δU ist dann der Zuwachs $\bar{U} - U$ bei Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen höherer Ordnung. Bei der Berechnung von δU geht nun Gauss in dem Bestreben, möglichst wenig bei seiner Ableitung vorauszusetzen und den Beweis von den allereinfachsten Elementen aus aufzubauen, so weit, dass er nicht einmal den allgemeinen Ausdruck für den Inhalt eines Flächenstücks als bekannt voraussetzt. Vielmehr berechnet er direkt den Inhalt eines Elementes der ursprünglichen Fläche U und den des entsprechenden Elementes der variierten Fläche $\bar{U}$. Daraus erhält er zunächst die Variation des Flächenelementes und erst weiterhin durch Integration die Variation des Gesamtflächeninhaltes U. Im einzelnen verfährt Gauss folgendermassen (Art. 21):

Durch Betrachtung einer speziellen Art von Variationen, bei denen die freien Oberflächenstücke der Flüssigkeit zu sich selbst parallel in vertikaler Richtung verschoben werden, leitet er in sehr einfacher Weise das Gesetz für die Steighöhen ab. Hierbei geht er auch auf die Glieder zweiter Ordnung ein.

35) Die Bezeichnungen $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$, $\bar{U}$, $\mathfrak{A}$ finden sich bei Gauss nicht; ebensowenig weiter unten die Bezeichnungen M, M_1, M_2, u. s. w.

Sind M, M_1, M_2 die Punkte der Fläche U bezw. mit den Abszissen

$$(x, y), \quad (x+dx,\ y+dy), \quad (x+d'x,\ y+d'y)$$

und N_1, N_2 diejenigen Punkte des Raumes, die aus M_1, M_2 hervorgehen, wenn man in deren z-Koordinaten die vollständigen Inkremente von z durch die entsprechenden Differentiale ersetzt, also

$$z(x+dx,\ y+dy) \text{ durch } z(x, y)+p\,dx+q\,dy,$$

bezw.

$$z(x+d'x,\ y+d'y) \text{ durch } z(x, y)+p\,d'x+q\,d'y,$$

so nimmt Gauss das Dreieck MN_1N_2 als Element der ursprünglichen Fläche und berechnet dessen Inhalt dU nach der bekannten Formel für den Flächeninhalt eines Dreiecks. Den drei Punkten M, M_1, M_2 der Fläche U entsprechen nun mittels der Zuordnung (29) auf der variierten Fläche $\overline{U}$ drei Punkte $\overline{M}$, $\overline{M}_1$, $\overline{M}_2$; mit $\overline{N}_1$, $\overline{N}_2$ mögen diejenigen Punkte bezeichnet werden, die aus $\overline{M}_1$, $\overline{M}_2$ hervorgehen, wenn man in den Ausdrücken der Koordinaten wieder die vollständigen Inkremente von z, δx, δy, δz durch die Differentiale ersetzt. Dann betrachtet Gauss als Element der variierten Fläche das Dreieck $\overline{M}\overline{N}_1\overline{N}_2$ und berechnet dessen Inhalt wieder nach der allgemeinen Formel für den Inhalt eines Dreiecks. Nunmehr werden die höheren Potenzen von δx, δy, δz und ihren partiellen Ableitungen vernachlässigt: das so erhaltene Resultat möge mit $d\overline{U}$ bezeichnet werden. Dann ist

$$d\overline{U}-dU=\delta dU.$$

Daraus ergibt sich schliesslich δU durch Integration über die Fläche U.

Dabei führt Gauss an Stelle der partiellen Ableitungen p, q die Richtungskosinus ξ, η, ζ der in Beziehung auf die Flüssigkeit äusseren Normale der Fläche U im Punkt x, y, z ein und erhält so schliesslich das Resultat in der Form

$$(30)\qquad \begin{aligned}\delta U &= \int dU\left((\eta^2+\zeta^2)\frac{\partial\delta x}{\partial x}-\xi\eta\frac{\partial\delta y}{\partial x}-\xi\zeta\frac{\partial\delta z}{\partial x}\right)\\ &+\int dU\left(-\xi\eta\frac{\partial\delta x}{\partial y}+(\xi^2+\zeta^2)\frac{\partial\delta y}{\partial y}-\eta\zeta\frac{\partial\delta z}{\partial y}\right).\end{aligned}$$

Wir bemerken, dass sich dasselbe Resultat ergibt, wenn man in der Lagrangeschen Fundamentalformel (21) $V=\sqrt{1+p^2+q^2}$ setzt.

12. Um zu erkennen, was das eben geschilderte Gausssche Verfahren, bei dem die Schwierigkeiten der Berechnung des Inhalts einer krummen Fläche in eigentümlicher Weise mit denjenigen der Variation der Doppelintegrale verwoben sind, für die allgemeine Variationsrechnung bedeutet, hat man zunächst die beiden Arten von Schwierigkeiten von einander zu trennen, indem man die allgemeine Formel für den Inhalt einer in Parameterdarstellung gegebenen Fläche, die Gauss[36]) schon im Jahr 1813 angegeben hatte, als bekannt und für die beiden Flächenstücke U und $\overline{U}$ als gültig voraussetzt. Berechnet man nach dieser Formel den Inhalt einerseits der durch die Gleichung (28) dargestellten Fläche U, andererseits der durch die Gleichungen (29) in Parameterdarstellung mit x, y als Parametern dargestellten Fläche $\overline{U}$, wobei in beiden Integralen die unabhängigen Variabeln auf denselben Bereich $\mathfrak{A}$ zu beschränken sind, und bildet die Differenz $\overline{U}-U$, so erhält man nach Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung in δx, δy, δz und ihren partiellen Ableitungen den Gaussschen Ausdruck (30) für δU. Das ist sozusagen der der Variationsrechnung angehörige Bestandteil des Gaussschen Gedankengangs.

Wir versuchen jetzt, denselben Gedankengang auf das allgemeine Integral

$$J = \iint\limits_{\mathfrak{A}} V(x, y, z, p, q)\, dx\, dy$$

mit variablem Integrationsbereich zu übertragen. Wir haben dann zunächst dasselbe Integral J für die Fläche $\overline{U}$ zu bilden, d. h. wenn wir alle auf die Fläche $\overline{U}$ bezüglichen Grössen durch Überstreichen auszeichnen,

$$\overline{J} = \iint\limits_{\overline{\mathfrak{A}}} V(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \overline{p}, \overline{q})\, d\overline{x}\, d\overline{y}.$$

Dabei ist die Fläche $\overline{U}$ in der aus den Gleichungen (29) durch Elimination von x, y sich ergebenden Form

$$\overline{z} = \overline{z}(\overline{x}, \overline{y}) \tag{31}$$

gedacht, $\overline{p}, \overline{q}$ sind die Ableitungen von $\overline{z}$ nach $\overline{x}$ und $\overline{y}$, und $\overline{\mathfrak{A}}$ ist die Projektion von $\overline{U}$ auf die x, y-Ebene.

Kehrt man jetzt von der Darstellung (31) der Fläche $\overline{U}$ zur Parameter-

36) *Theoria attractionis corporum sphaeroidicorum etc.*, Comm. Soc. Reg. sc. Gotting. rec. vol. II, 1813, Art. 10; Werke, Bd. V, S. 15.

darstellung (29) zurück, so bedeutet das, dass man in dem Doppelintegral $\bar{J}$ durch die Substitution

$$\bar{x} = x + \delta x, \quad \bar{y} = y + \delta y$$

x, y als unabhängige Variable einführt. Das gibt aber

$$\bar{J} = \iint\limits_{\mathfrak{A}} V(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{p}, \bar{q}) \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial x} \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} - \frac{\partial \bar{x}}{\partial y} \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} \right) dx\, dy,$$

wobei nunmehr der Integrationsbereich für $\bar{J}$ derselbe ist wie für J.

Durch die Zurückführung des Integrationsbereichs des Integrals $\bar{J}$ auf den Integrationsbereich von J sind nun aber die mit der Variation des Integrationsbereichs verbundenen grundsätzlichen Schwierigkeiten überwunden, und die Berechnung von δJ bietet keine Schwierigkeiten mehr. Das Resultat ist die LAGRANGEsche Formel (21) mit den früher angegebenen Werten (18), (16) für δV, δp, δq. Diese Verallgemeinerung des GAUSSschen Verfahrens ist zwar im Grunde mit der POISSONschen Methode der Parameterdarstellung aufs engste verwandt, verdient aber doch als besondere Methode der Behandlung der Doppelintegrale aufgeführt zu werden; wir werden sie die Substitutionsmethode nennen. Sie findet sich zuerst klar ausgesprochen und durchgeführt in der (trotz einiger Fehler) vortrefflichen Darstellung der Variationsrechnung, die BORDONI[37]) im Anschluss an die Darstellung von LAGRANGE[37a]) und diese nach den verschiedensten Richtungen weiterführend gegeben hat, und die in der Literatur der Variationsrechnung viel zu wenig Beachtung gefunden hat.

Die Entwicklungen von BORDONI sind allem Anschein nach unbeeinflusst durch GAUSS und vermutlich ohne Kenntnis der GAUSSschen Arbeit geschrieben.

Später ist dieselbe Methode, verallgemeinert, von SABININE[38]) zum Beweis der beim n-fachen Integral der LAGRANGEschen Fundamentalformel entsprechenden Formel von OSTROGRADSKY und PAGANI benutzt worden. Auch C. JORDAN legt diese Methode seiner Darstellung der Variation mehrfacher Integrale[39]) zugrunde.

---

37) A. M. BORDONI, *Lezioni di calcolo sublime,* Mailand 1831, Bd. II, Art. 398.

37a) J. L. LAGRANGE, *Leçons sur le calcul des fonctions,* Journal de l'École Polyt., cah. 12, 1804, nouvelle édition 1806, Oeuvres t. X.

38) *Démonstration d'une formule de M. Ostrogradsky relative au calcul des variations des intégrales multiples,* Journal für r. u. a. Mathematik, Bd. 59 (1861), S. 185—189.

39) C. JORDAN, *Cours d'Analyse de l'École Polyt.,* Bd. III (1896), Nr. 396.

13. Indem wir die Besprechung der weiteren Umformung von δU auf später verschieben, gehen wir zur Berechnung der Variationen der Integrale

$$s, \int z ds, T \tag{32}$$

über.

Hier ist die von Gauss benutzte Methode (Art. 27) in noch höherem Grade als bei der Berechnung von δU auf das spezielle vorliegende Problem zugeschnitten. Der Zuwachs, den das Volumen s beim Übergang von der Fläche U zur variierten Fläche $\overline{U}$ erfährt, ist das Volumen des zwischen den beiden Flächen U, U einerseits und der Gefässwand andererseits eingeschlossenen Raumes, vorausgesetzt, dass die verschiedenen Teile desselben mit geeignetem Vorzeichen in die Rechnung eingestellt werden. Dieser Raum wird nun folgendermassen in Elemente zerlegt: Entsprechende Punkte der Seiten der beiden in Nr. 11 eingeführten Dreiecke MN_1N_2 und $\overline{M}\overline{N}_1\overline{N}_2$ werden durch Gerade verbunden. Der so entstehende Körper kann dann angenähert durch ein Prisma ersetzt werden, dessen mit richtigem Vorzeichen genommenes Volumen durch das Produkt aus der Basis dU und der Projektion des Variationsvektors $M\overline{M}$ auf die äussere Normale der Fläche U im Punkt M ausgedrückt wird. Dieses Prisma wird als Element des fraglichen Volumens gewählt, woraus sich für δs der Wert

$$\delta s = \int dU . \delta e . \cos (4, 5) \tag{33}$$

ergibt, wo

$$\delta e = \sqrt{(\delta x)^2 + (\delta y)^2 + (\delta z)^2} = |M\overline{M}|,$$

und in der Gaussschen Bezeichnung 4 die Richtung der äusseren Normale an die Fläche U im Punkt M, 5 die Richtung $M\overline{M}$ bedeutet.

Dieselbe Zerlegung liefert

$$\delta \int z ds = \int z dU . \delta e . \cos (4, 5). \tag{34}$$

In ähnlicher Weise wird die Variation der Fläche T direkt berechnet. Bezeichnet P die gemeinsame Begrenzungskurve der beiden Flächen T und U, so muss nach der Natur der Aufgabe die Begrenzungskurve $\overline{P}$ der Fläche $\overline{U}$ ebenfalls auf der Gefässwand liegen. Ein Element dP der Kurve P, das ihm mittels (29) zugeordnete Element $d\overline{P}$ der Kurve $\overline{P}$ und die beiden, ent-

sprechende Endpunkte der beiden Elemente verbindenden Geraden bilden dann ein annähernd als Parallelogramm zu betrachtendes Element des Zuwachses, den die Fläche T bei der Variation erfährt. Bezeichnet daher 8 diejenige vom Ausgangspunkt des Elementes dP ausgehende Richtung, die auf diesem Element senkrecht steht, in der Tangentialebene an die Gefässwand gelegen und in Beziehung auf den Raum s nach aussen gerichtet ist, so ergibt sich für die Variation von T

$$(35) \qquad \delta T = \int dP . \delta e . \cos(5, 8) .$$

Diese Gausssche Methode der Berechnung der Variationen der drei Integrale (32) ist an Eleganz und Einfachheit wohl kaum zu übertreffen. Allein die Schwierigkeiten der Integralrechnung einerseits und der Variationsrechnung andererseits sind hier so unauflöslich verflochten, dass es schwer sein dürfte, einen den heutigen Anforderungen an Strenge entsprechenden Beweis darauf zu gründen, und die Methode ist so ausschliesslich dem speziellen Problem angepasst, dass es nicht leicht scheint, daraus Folgerungen allgemeiner Natur für die Variationsrechnung abzuleiten.

Abschliessend können wir die Gausssche Methode der Berechnung der ersten Variation eines Doppelintegrals als eine energische Reaktion gegen den alles überwuchernden Formalismus des δ-Algorithmus, als eine Rückkehr vom »formalen« zum »gegenständlichen« Denken charakterisieren. Wohl hatte die Einführung des Variationsprozesses durch Lagrange gegenüber den mühsamen Infinitesimalbetrachtungen von Euler und seinen Vorgängern einen ganz ungeheuern Fortschritt bedeutet; aber in der rein mechanischen Anwendung dieses Prozesses bei gleichzeitiger Variation der unabhängigen Variabeln lag eine Überschreitung der Grenzen seiner Gültigkeit, die zu Unklarheiten und Fehlern geführt hatte. Poisson hatte zwar durch die Methode der Parameterdarstellung die Schwierigkeiten beseitigt, aber nur indem er die Variation der unabhängigen Variabeln überhaupt über Bord warf. Im Gegensatz dazu hat Gauss die Methode der Variation der unabhängigen Variabeln wieder zu Ehren gebracht, indem er die »formale Variation« durch eine sinngemässe, auf die Bedeutung der dem Formalismus zugrunde liegenden Operation aufgebaute Methode ersetzte[39a]).

39a) Vgl. hierzu die folgende Stelle aus einem Brief von Gauss an Schumacher vom 29. Januar 1829:

B) Umformung der ersten Variation durch partielle Integration.

14. Wir kehren jetzt zum Flächenintegral (30) zurück, durch das die Variation δU dargestellt worden war. Zum Zweck der Umformung desselben mittels partieller Integration zerlegt GAUSS (Art. 22, 23) die Fläche U, im Gegensatz zu der in Nr. 11 benutzten Zerlegungsart, auf eine zweite Art in Elemente, nämlich durch zwei Systeme von Ebenen, das erste senkrecht zur y-Axe, das zweite senkrecht zur x-Axe. Dieser Zerlegung entsprechend wird der Ausdruck für das Flächenelement

$$dU = \frac{dx\,dy}{\zeta}, \tag{36}$$

wenn dx, dy als positiv angenommen werden und überdies vorausgesetzt wird, dass auch ζ auf der ganzen Fläche positiv ist.

Das nach Einführung dieses Ausdrucks für dU in (30) sich ergebende Doppelintegral für δU kann nunmehr mittels der der partiellen Integration zugrunde liegenden Formeln (2) auf die Form gebracht werden[40])

$$\delta U = \iint \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y}\right) dx\,dy + \iint C\,dx\,dy \tag{37}$$

worin A, B, C gewisse homogene lineare Funktionen von δx, δy, δz sind.

Hier nimmt nun vor allem die weitere Umformung des ersten Integrals

$$\iint \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y}\right) dx\,dy \tag{38}$$

unser Interesse in Anspruch. Wir haben früher (Nr. 1) gesehen, wie schon EULER (1770) an dieser Stelle stecken geblieben war, da aus der Form

$$\int A\,dy + \int B\,dx,$$

in die er das Doppelintegral brachte, für die Randbedingung nichts zu schliessen war, und wie auch LAGRANGE (1811) und POISSON (1816) hierüber nicht hinausgekommen waren.

Wir haben dann weiter gesehen (Nr. 4), wie OHM (1825) eine erste Lösung

---

»LAGRANGE, wie fast alle Analysten der neueren Zeit, trifft zuweilen der Vorwurf, beim Spiel der Zeichen nicht immer die Sache lebendig gegenwärtig zu haben«, *Briefwechsel zwischen C. F. Gauss und H. C. Schumacher*, Bd. II, S. 200.

40) Die Grössen A, B entsprechen hier den Grössen $A + V\delta x$, $B + V\delta y$ von Gleichung (22).

der hier vorliegenden Schwierigkeit in der Formel (11) gefunden hatte, sahen aber gleichzeitig, dass diese Lösung gerade für die bei geometrischen Aufgaben fast einzig in Betracht kommende Gestalt des Integrationsbereichs illusorisch wird.

Nunmehr finden wir endlich bei GAUSS die endgültige Lösung, die darin besteht, dass er das Doppelintegral (38) in ein Linienintegral verwandelt, zwar nicht in ein Linienintegral über die Begrenzung des Integrationsbereichs $\mathfrak{A}$, wie wir es heutzutage mittels der GREENschen Formel zu tun gewohnt sind, vielmehr in ein Linienintegral, genommen über die Begrenzung P des Flächenstücks U. Im einzelnen verfährt dabei GAUSS folgendermassen: In dem Integral

$$\iint \frac{\partial A}{\partial x}\, dx\, dy$$

wird zuerst nach x integriert, also die Summation über diejenigen Elemente der Fläche vorgenommen, welche zwischen zwei Ebenen y und $y+dy$ des ersten der oben erwähnten Ebenensysteme enthalten sind. Die x-Koordinaten der in gerader Anzahl vorhandenen Schnittpunkte der Kurve P mit der Ebene y seien der Reihe nach x^0, x', x'', ... Dann ist das Resultat dieser Summation

$$[A(x', y) - A(x^0, y) + A(x''', y) - A(x'', y) \ldots]\, dy.$$

Sind nun dP^0, dP', dP'', ... die Elemente der Kurve P, die zwischen den beiden Ebenen y und $y+dy$ gelegen sind, und sind X, Y, Z die Richtungskosinus der positiven Tangente an die Kurve P in einem allgemeinen Punkte derselben, so ist bei der von GAUSS gewählten Festsetzung über die positive Umlaufsrichtung der Kurve P

$$(39) \qquad dy = -Y^0\, dP^0 = +Y'\, dP' = -Y''\, dP'' \ldots$$

Die obige Summe lässt sich also schreiben

$$A(x_0, y)\, Y^0\, dP^0 + A(x', y)\, Y'\, dP' + A(x'', y)\, Y''\, dP'' + \cdots,$$

und wenn nunmehr auch nach y summiert wird, so erhält man das Resultat

$$\iint \frac{\partial A}{\partial x}\, dx\, dy = \int A\, Y\, dP,$$

wo das Linienintegral rechts über die ganze Begrenzungskurve P in positivem

Sinn zu erstrecken ist. Das analoge Verfahren, bei dem nunmehr zuerst nach y integriert wird, ergibt

$$\iint \frac{\partial B}{\partial y} dx\, dy = -\int BX\, dP,$$

da hier in entsprechender Bezeichnung

$$dx = +X^0 dP^0 = -X' dP' = +X'' dP'' \ldots. \tag{40}$$

und die Verbindung beider Resultate liefert den Satz

$$\iint \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y}\right) dx\, dy = \int (AY - BX)\, dP, \tag{41}$$

wenn P irgend eine geschlossene Raumkurve ist, deren Projektion auf die x, y-Ebene die einmal in positivem Sinn durchlaufene Begrenzungskurve des Integrationsbereichs $\mathfrak{A}$ des Doppelintegrals ist.

Gauss spricht das zwar nicht als allgemeinen Satz aus mit beliebigen Funktionen A, B, sondern nur für die speziellen Funktionen A, B, die bei der Berechnung von δU auftreten. Trotzdem können wir den Satz mit Fug und Recht als die Gausssche Form der Greenschen Formel bezeichnen, denn die Greensche Formel für die Ebene ist in (41) als spezieller Fall enthalten, wenn nämlich die Kurve P eben ist und in der x, y-Ebene liegt.

15. Es wirft sich hier die Frage auf, ob Gauss nur das Verdienst zukommt, zum ersten Mal einen bereits bekannten Satz (die »Greensche Formel«) in etwas modifizierter Form auf die Umformung der ersten Variation des Doppelintegrals angewandt zu haben, oder ob man ihm auch die Greensche Formel selbst zuschreiben darf.

Da ist denn zu sagen, dass — soweit ich habe in Erfahrung bringen können —, die Greensche Formel für die Ebene hier überhaupt zum ersten Mal vorkommt (als Spezialfall der Formel (41)), wenn man von der Ohmschen Formel (11) absieht, die eben doch nur als Vorläufer zu betrachten ist, insofern bei ihr gerade das Charakteristische, der Begriff des Linienintegrals, fehlt. Dagegen war der analoge Satz, durch den ein Raumintegral in ein Oberflächenintegral verwandelt wird, bereits in zwei[41]) vorausgegangenen Arbeiten vorge-

41) In der *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften,* Bd. II 1, S. 477, Fussnote 78) wird in diesem Zusammenhang auch auf eine Arbeit von Lagrange verwiesen. Dabei handelt es sich aber nur

kommen: Erstens hatte GAUSS selbst schon 1813 in der bereits oben zitierten Arbeit *Theoria attractionis etc.*[42]) den Satz

$$(42)\qquad \int \frac{\partial W(x,y,z)}{\partial x}\,d\tau = \int W(x,y,z)\cos(n,x)\,d\sigma$$

und die beiden entsprechenden für y und z für die speziellen Fälle: $W = x$ und

$$W = F(r), \quad r = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$$

bewiesen; dabei bedeutet $d\tau$ ein Volumenelement, $d\sigma$ ein Oberflächenelement und n die äussere Flächennormale. Zweitens hatte GREEN in einer vom 29. März 1828 datierten Arbeit[43]) denselben Satz (42) und die beiden entsprechenden mit $W = V\frac{\partial U}{\partial x}$ bewiesen und daraus den nach ihm benannten Satz über die Umformung des Integrals

$$\int\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}\right)d\tau$$

abgeleitet. Der gewöhnlich als GREENsche Formel bezeichnete Satz in der Ebene kommt bei GREEN gar nicht vor.

Hiernach dürfte die oben aufgeworfene Frage wohl dahin zu beantworten sein, dass man GAUSS nicht nur die Anwendung der GREENschen Formel, sondern auch diese selbst zuschreiben darf.

16. Wir erwähnen gleich hier zwei weitere Autoren, die sich nur wenig später als GAUSS ebenfalls mit der GREENschen Formel beschäftigt, und sie zur Umformung der ersten Variation des allgemeinen Doppelintegrals (1) benutzt haben, BORDONI und POISSON. — BORDONI hat (1831) in seinem bereits früher erwähnten *Calcolo sublime*[44]) dieselbe Formel (41) wie GAUSS ab-

---

um Formeln wie

$$\iiint L\frac{\partial u}{\partial x}\,dx\,dy\,dz = \iint Lu\,dy\,dz - \iiint u\frac{\partial L}{\partial x}\,dx\,dy\,dz,$$

bei denen gerade das Charakteristische, die Umformung des Doppelintegrals in ein Oberflächenintegral, fehlt; daher kommt diese Arbeit hier für uns ebensowenig in Betracht wie die Formel (5) von EULER. Aus demselben Grund scheidet auch die ebendort, Fussnote 79) zitierte Arbeit von LAMÉ vom 8. 5. 1829 aus.

42) GAUSS, loc. cit. 36), Art. 3—5.

43) *An essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism*, Nottingham 1828, abgedruckt im Journal für r. u. a. Mathematik, Bd. 39 (1850), 44 (1852), 47 (1854). Der uns hier interessierende Satz findet sich in Bd. 44, S. 360—362.

44) BORDONI, loc. cit. 37), Bd. II, Art. 424.

geleitet, allerdings mit einem Zeichenfehler (rechts $+B$ statt $-B$). Er schreibt zunächst in ungenauer Bezeichnung

$$\text{(43)} \qquad \begin{aligned} \iint \frac{\partial A}{\partial x}\, dx\, dy &= \int [A(x_1, y) - A(x_0, y)]\, dy, \\ \iint \frac{\partial B}{\partial y}\, dx\, dy &= \int [B(x, y_1) - B(x, y_0)]\, dx \end{aligned}$$

und fährt dann fort: Die beiden Integrale

$$\int A y'(t)\, dt, \quad \int B x'(t)\, dt,$$

erstreckt über die ganze Begrenzungslinie P (auf der die Bogenlänge t gemessen ist), sind offenbar den beiden einfachen Integralen auf der rechten Seite von (43) gleich. Über die Umlaufsrichtung wird nichts gesagt, und eine Folge dieser Nichtbeachtung derselben ist das falsche Vorzeichen in einer der beiden so erhaltenen Gleichungen. Bordoni erwähnt Gauss nicht, und in der Tat ist gerade dieses falsche Vorzeichen wohl der beste Beweis dafür, dass die Bordonischen Entwicklungen ohne Kenntnis der Gaussschen Arbeit geschrieben sind, wofür auch sonst alle Anzeichen sprechen.

Im Gegensatz zu Gauss und Bordoni hat Poisson[45]) in seiner Arbeit vom Jahre 1831 die Greensche Formel in der Ebene in der folgenden Form abgeleitet

$$\text{(44)} \qquad \iint \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y}\right) dx\, dy = \int (A \cos \alpha + B \cos \beta)\, ds,$$

erstreckt über die Begrenzung des Integrationsbereichs des Doppelintegrals in der x, y-Ebene, mit ds als Bogenelement, während α, β die Winkel der äusseren Normale an die Kurve mit der positiven x- bezw. y-Axe bedeuten. Poissons Beweis beruht auf den den Gaussschen Formeln (39) und (40) analogen Gleichungen

$$\begin{aligned} dx &= -\cos \beta^0\, ds^0 = +\cos \beta'\, ds' \ldots \\ dy &= -\cos \alpha^0\, ds^0 = +\cos \alpha'\, ds' \ldots \end{aligned}$$

Die Arbeit von Poisson scheint die früheste Stelle zu sein, an der die Greensche Formel in der Ebene in der uns heute geläufigen Form auftritt. Auf die Frage, ob Poisson bei Aufstellung der Formel (44) von der Gaussschen Arbeit beeinflusst war, werden wir weiter unten (Nr. 23) eingehen.

45) Poisson, loc. cit. 30), S. 300.

17. Nach dieser Abschweifung kehren wir zu dem Ausdruck (37) für δU zurück, in dem nunmehr das erste Doppelintegral durch das Linienintegral der Gl. (41) zu ersetzen ist. Setzt man für A, B, C ihre Werte ein und verwandelt das in (37) übrig bleibende Doppelintegral mittels der Gleichung (36) wieder rückwärts in ein über die Fläche U genommenes Oberflächenintegral, so ergibt sich schliesslich der folgende Ausdruck[46]) für die erste Variation des Flächeninhalts U

$$\delta U = -\int \delta e . \cos(5, 7) . dP + \int \delta e . \cos(4, 5) \cdot \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) dU; \tag{45}$$

darin bedeutet 7 eine Richtung, die senkrecht zum Element dP ist, die Fläche U berührt und in der Richtung nach der Fläche U zu gerichtet ist, während R, R' die beiden Hauptkrümmungsradien in dem betrachteten Punkt der Fläche bedeuten mit einer der heute üblichen entgegengesetzten Vorzeichenbestimmung.

Aus den Gleichungen (34), (35) und (45) ergibt sich nunmehr nach (25) der Wert von δW. Dabei tritt eine Vereinfachung ein, wenn man den »Randwinkel« $(7, 8) = i$ einführt und beachtet, dass

$$\cos(5, 7) = \cos(5, 8) \cos i. \tag{46}$$

So erhält Gauss das Schlussresultat

$$\delta W = \int dU . \delta e . \cos(4, 5) . \left[z + \alpha^2 \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)\right] \\ - \int dP . \delta e . \cos(5, 8) . (\alpha^2 \cos i - \alpha^2 + 2\beta^2). \tag{47}$$

Wir heben daran besonders den invarianten Charakter der Formel hervor, invariant in Beziehung auf Koordinatentransformation[47]) sowohl, als auch in Beziehung auf die Darstellungsform der Flächen U und T. Alle in der Formel vorkommenden Grössen haben eine unmittelbar mit dem vorgelegten Problem zusammenhängende geometrische Bedeutung. Das wird erreicht durch die auf den ersten Blick etwas überraschende Darstellung der Doppelintegrale als Oberflächenintegrale über die Fläche U, der Linienintegrale als Linienintegrale über die Begrenzung P der Fläche U, nicht über deren Projektion auf die x, y-Ebene. Der Gausssche Beweis der Formeln für δU, δs und δW

46) Vgl. auch unten Nr. 24 und 25, Eingang.

47) z ist hier nicht als Koordinate aufzufassen, vielmehr als senkrechter Abstand über einer horizontalen Ebene.

ist zwar später nach der Richtung grösserer Einfachheit, Allgemeinheit und Strenge mehrfach verbessert worden; aber die Resultate selbst sind an Einfachheit und Eleganz unübertroffen geblieben: sie tragen den Stempel des absolut vollendeten an sich.

C) Die partielle Differentialgleichung für die Flüssigkeitsoberfläche und die Randbedingung.

18. Nachdem so die erste Variation von W und s auf ihre einfachste Form gebracht war, handelte es sich nunmehr darum, daraus die Bedingungen erster Ordnung für ein Minimum des Ausdrucks W bei gegebenem Werte von s abzuleiten. Hier hätte nun GAUSS von der EULERschen Regel Gebrauch machen können. Diese Regel war zwar von EULER[48]) und LAGRANGE[49]) nur für einfache Integrale abgeleitet, aber doch auch schon auf Doppelintegrale angewandt worden, und zwar beim Problem des Körpers von kleinster Oberfläche bei gegebenem Volumen. Aber GAUSS hat es auch hier vorgezogen, ganz unabhängig von seinen Vorgängern seinen eigenen Weg zu gehen. Bei der prinzipiellen Bedeutung der hier vorliegenden Schlüsse verlohnt es sich, ihm dabei ins einzelne zu folgen.

GAUSS schliesst so (Art. 28): Soll die Fläche U den Ausdruck W bei gegebenem Werte von s zu einem Minimum machen, so darf W für keine unendlich kleine Formänderung der Fläche, bei der die Begrenzungskurve auf der Gefässwand verbleibt, und bei der das Volumen s ungeändert bleibt, »d. h. für die $\delta s = 0$«, einen negativen Zuwachs erfahren. Daher muss in jedem Punkt der Fläche das Element des Doppelintegrals in dem Ausdruck für W, nämlich

$$dU.\delta n.\left[z+\alpha^2\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)\right]$$

— wo wir zur Abkürzung

$$\delta e.\cos(4,5) = \delta n \tag{48}$$

gesetzt haben —, dem entsprechenden Element von δs, nämlich $dU.\delta n$ pro-

48) EULER, Institutiones calculi integralis, Bd. III (1770), Appendix de calc. var., art. 90, Opera, Ser. I, vol. 13, S. 409.

49) LAGRANGE, Misc. Taurinensia 1760/61, III. Abteilung, S. 173 ff., Oeuvres, Bd. I, S. 356.

portional sein, d. h. die freie Flüssigkeitsoberfläche muss der partiellen Differentialgleichung

$$(49) \qquad z + \alpha^2\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) = \text{Const.}$$

genügen. »Denn wenn diese Proportionalität nicht stattfände, so könnte man offenbar den Wert von W durch eine geeignete Veränderung der Form der Oberfläche bei unverändert bleibender Begrenzung verkleinern«. Leider führt GAUSS diesen Schluss nicht näher aus. Gemeint ist wohl folgendes[50]: Angenommen, die Funktion

$$M = z + \alpha^2\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right),$$

(die stillschweigend als stetig vorausgesetzt wird), wäre nicht konstant auf der Fläche U, so seien 1 und 2 zwei nicht auf der Begrenzung P liegende Punkte von U, in denen M verschiedene Werte M_1 und M_2 annimmt. Dann ersetze man die bestimmten Integrale durch die endlichen Summen, deren Grenzen sie sind, und variiere nun nur zwei Elemente dU_1 und dU_2 der Fläche U, die die beiden Punkte 1 bezw. 2 enthalten, aber so, dass $\delta s = 0$, und lasse die ganze übrige Fläche, insbesondere auch die Begrenzung ungeändert. Für eine solche Variation der Fläche ist dann

$$\delta s = \delta n_1 . dU_1 + \delta n_2 . dU_2 = 0, \quad \delta W = M_1 \delta n_1 . dU_1 + M_2 \delta n_2 . dU_2,$$

wenn δn_1, δn_2 die Werte von δn in den Punkten 1 und 2 bezeichnen. Hieraus folgt

$$\delta W = (M_1 - M_2)\delta n_1 . dU_1,$$

und diese Grösse kann durch passende Wahl des Vorzeichens der willkürlich bleibenden Grösse δn_1 negativ gemacht werden. Es muss also die Annahme $M_1 \neq M_2$ falsch sein, d. h. M muss auf der ganzen Fläche U konstant sein.

Verbindet man den Grundgedanken dieses Beweises mit dem Mittelwertsatz für Doppelintegrale, so erhält man leicht einen auch heutigen Anforderungen

---

50 Fast genau in dieser Weise ist der Schluss durchgeführt in der Dissertation von R. REIFF, *Über den Einfluss der Capillarkräfte auf die Form der Oberfläche einer bewegten Flüssigkeit*, Tübingen 1879, S. 8. Dass GAUSS etwa diesen Gedankengang im Sinn hatte, wird auch durch den Beweis in Art. 31 der Arbeit *»Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden ... Kräfte«* (1840), Werke, Bd. V, S. 233 wahrscheinlich gemacht; vgl. unten III. Teil, Nr. 2

an Strenge genügenden Beweis. Hiermit nahe verwandt ist der Beweis, den H. WEBER[51]) in den Anmerkungen zur deutschen Ausgabe der GAUSSschen Arbeit gegeben hat; dabei wird durch einen Kunstgriff die Anwendung des Mittelwertsatzes umgangen.

Derselbe Gedanke liegt auch den beiden Beweisen für das Fundamentallemma für isoperimetrische Probleme zugrunde, die J. BERTRAND (1842) und P. DU BOIS REYMOND (1879) gegeben haben[52]), sowie dem Beweis der EULERschen Regel bei Doppelintegralen, den A. KNESER in § 64 seines *Lehrbuchs der Variationsrechnung* (Braunschweig 1900) gegeben hat.

19. Es wird jetzt vorausgesetzt (Art. 29), dass die Fläche U die als notwendig nachgewiesene partielle Differentialgleichung (49) erfüllt. Dann reduziert sich die Variation von W auf

$$(50) \qquad \delta W = -\int dP.\delta\nu.(\alpha^2 \cos i - \alpha^2 + 2\beta^2),$$

wo wir zur Abkürzung: $\delta e.\cos(5, 8) = \delta\nu$ gesetzt haben. Falls $\beta^2 \lesseqgtr \alpha^2$, geht der Ausdruck für δW durch Einführung des durch die Bedingungen

$$(51) \qquad \sin\frac{A}{2} = \frac{\beta}{\alpha}, \qquad 0 < A < \pi$$

definierten Winkels A über in

$$\delta W = \alpha^2 \int dP.\delta\nu.(\cos A - \cos i).$$

Nun ist nach der Bedeutung der Richtungen 5 und 8 die Funktion $\delta\nu$ an einer Stelle der Begrenzung P positiv oder negativ, jenachdem bei der betrachteten virtuellen Bewegung die Flüssigkeit an der betreffenden Stelle über die Begrenzung P hinaustritt oder von ihr zurückweicht. Hieraus schliesst GAUSS, dass entlang der ganzen Begrenzungskurve P die Randbedingung

$$(52) \qquad i = A$$

erfüllt sein muss. Denn wäre in einem Stück L der Begrenzung $i < A$ (bezw. $i > A$), so könnte man durch eine virtuelle Bewegung der Flüssigkeit,

51) OSTWALDS Klassiker der exakten Wissenschaften, Nr. 135, S. 70, 71.

52) Vgl. *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften,* Bd. II 1 (KNESER), S. 581. Es handelt sich um den ersten Beweis von DU BOIS REYMOND, dessen Grundgedanken DU BOIS REYMOND selbst auf die oben genannte Dissertation von REIFF zurückführt, sodass hier eine mittelbare Einwirkung von GAUSS festzustellen sein dürfte.

welche die ganze Begrenzungskurve P mit Ausnahme des Stückes L ungeändert lässt, für dieses Stück aber von der ersten (bezw. von der zweiten) Art ist, δW negativ machen.

Es ist interessant, dass GAUSS auch hier sich nicht mit dem landläufigen Schluss: δW muss verschwinden, also muss wegen der Willkürlichkeit von $\delta\nu$ der Faktor von $\delta\nu$ identisch verschwinden, begnügt, sondern einen Beweis für notwendig hält, und zwar ist der Grundgedanke dieses Beweises derselbe, der dem DU BOIS REYMONDschen Beweis[53]) des Fundamentallemmas für einfache Integrale zugrunde liegt.

Wenn $\beta^2 > \alpha^2$, so ist der Faktor von $\delta\nu$ unter dem Integral (50) stets positiv und daher kann δW stets durch eine virtuelle Bewegung erster Art negativ gemacht werden. In diesem Fall kann also ein Minimum des Integrals W nicht stattfinden.

Mit der Gleichung $i = A$ war zum ersten Mal in der Geschichte der Variationsrechnung für ein zweidimensionales Variationsproblem die Randbedingung bewiesen. Zugleich dürfen wir als ein Nebenresultat feststellen, dass GAUSS die Beweise für das Fundamentallemma der Variationsrechnung und für die EULERsche Regel auf eine höhere Stufe der Strenge gebracht hat, als vor ihm erreicht worden war. —

20. Mit der Herleitung der Randbedingung für das spezielle GAUSSsche Variationsproblem war im wesentlichen zugleich auch die allgemeine Aufgabe gelöst, für das Extremum eines Doppelintegrals von der Form

$$J = \iint V(x, y, z, p, q)\, dx\, dy \tag{53}$$

die Randbedingung aufzustellen, wenn die Begrenzungskurven der zulässigen Flächen auf einer gegebenen Fläche

$$z = g(x, y) \tag{54}$$

liegen sollen. Denn die Verbindung der LAGRANGEschen Formel (22) mit dem GAUSSschen Fundamentalsatz (41) liefert, wenn die LAGRANGEsche partielle Differentialgleichung erfüllt ist, die »Grenzgleichung«

$$\int [(Py' - Qx')(\delta z - p\delta x - q\delta y) + V(y'\delta x - x'\delta y)]\, dt = 0, \tag{55}$$

---

53) Mathematische Annalen, Bd. XV (1879), S. 297, 300.

wobei das Linienintegral über die Begrenzungskurve P des gesuchten Flächenstücks zu erstrecken ist, und die Variable t und die Ableitungen x', y' dieselbe Bedeutung haben wie in Nr. 16. Es blieb also nur noch übrig, aus der Gleichung (55) die letzten Folgerungen zu ziehen. Hierüber soll noch kurz berichtet werden.

Die Gleichung (55) findet sich zuerst (1831) bei BORDONI[54]), allerdings in Folge des in Nr. 16 erwähnten Vorzeichenfehlers mit verkehrtem Vorzeichen vor den mit x' multiplizierten Gliedern. Um von hier aus zur Randbedingung zu kommen, drückt BORDONI mittels der aus (54) durch Variation folgenden Gleichung

$$\delta z = g_x \delta x + g_y \delta y \tag{56}$$

δz durch δx und δy aus und schliesst dann, dass die Koeffizienten der willkürlich bleibenden Variationen δx und δy verschwinden müssen. Das ergibt die beiden Gleichungen

$$\begin{cases} \mp (g_x - p) Q x' + ((g_x - p) P + V) y' = 0, \\ \mp ((g_y - q) Q + V) x' + (g_y - q) P y' = 0. \end{cases} \tag{57}$$

Darin ist das obere Zeichen das richtige, das untere das BORDONIsche. Hieraus folgert BORDONI durch Elimination von x', y' die Gleichung

$$(g_x - p) P + (g_y - q) Q + V = 0. \tag{58}$$

Dies ist in der Tat die richtige Randbedingung, und BORDONI gebührt das Verdienst, sie zum ersten Mal aufgestellt zu haben; auch hat er sie zuerst auf den speziellen Fall der Minimalflächen angewandt. Aber er hat dieses Resultat nur dadurch erreicht, dass er zu dem ersten Fehler noch einen zweiten hinzufügt: Die Eliminante zwischen den beiden Gleichungen (57) lautet nämlich sowohl bei den richtigen wie bei den falschen Vorzeichen

$$V[(g_x - p) P + (g_y - q) Q + V] = 0,$$

und BORDONI setzt ganz willkürlich den zweiten Faktor gleich null, während er, wie wir sehen werden, den ersten hätte gleich null setzen müssen.

Zu den beiden Gleichungen (57) tritt nämlich noch eine dritte hinzu.

---

54) BORDONI, loc. cit. 37), Art. 424.

Denn aus der entlang der Begrenzung P geltenden Gleichung $z(x, y) = g(x, y)$ folgt durch Differentiation nach t die folgende zuerst von POISSON[55]) herangezogene Gleichung

$$(g_x - p)\, x' + (g_y - q)\, y' = 0. \tag{59}$$

Durch Elimination von x', y' aus den drei Gleichungen (57) und (59) folgen aber bei den BORDONIschen Vorzeichen im Allgemeinen zwei von einander unabhängige Randbedingungen, nämlich

$$V = 0, \quad (g_x - p)\, P - (g_y - q)\, Q = 0,$$

also ein falsches Resultat, wie es bei dem falschen Ausgangspunkt zu erwarten war. Dagegen ergibt dieselbe Elimination bei den richtigen Vorzeichen nur die eine Bedingung (58). Es ist jedoch einfacher, wie dies POISSON tatsächlich tut, die Gleichung (59) unmittelbar zur Umformung des Linienintegrals (55) zu benützen, nachdem man darin δz durch δx und δy ausgedrückt hat. Man erhält so

$$\int [P(g_x - p) + Q(g_y - q) + V]\,(y'\delta x - x'\delta y)\, dt = 0,$$

woraus unmittelbar die Gleichung (58) folgt. In der Tat hat POISSON die allgemeine Randbedingung (58) zuerst richtig bewiesen[56]).

21. Fragen wir schliesslich noch, welche Einwände sich etwa vom Standpunkt der modernen kritischen Variationsrechnung aus gegen die GAUSSsche Schlussweise erheben lassen, so ist zunächst hervorzuheben, dass GAUSS von der EULERschen Auffassung des Variationsprozesses als Differentiation nach einem Parameter keinen Gebrauch macht; und doch hat erst diese Auffassung die Variationsrechnung auf eine feste Grundlage gestellt. Denn erst die Betrachtung von ein- (oder mehr-) parametrigen Scharen von zulässigen Variationen ermöglicht es, aus dem Vorzeichen der ersten Variation einen strengen Schluss auf das Vorzeichen der vollständigen Variation zu machen und so die

---

55) POISSON, loc. cit. 30), S. 314.

56) Allerdings steht die Randbedingung (58) in dieser Form nicht bei POISSON, vielmehr ist sie als spezieller Fall in dem entsprechenden Resultat für den allgemeineren, von POISSON behandelten Fall enthalten, wo unter dem Doppelintegral auch die zweiten Ableitungen r, s, t von z vorkommen, und die auf diesen allgemeinen Fall bezüglichen Formeln von POISSON enthalten einen schon von E. G. BJÖRLING bemerkten und verbesserten Rechenfehler (*Calculi variationum integralium duplicium exercitationes*, Upsala 1842); die richtigen Formeln gibt auch TODHUNTER, loc. cit. 5), S. 85, 86.

Notwendigkeit des Verschwindens der ersten Variation zu beweisen. In der Tat hat denn auch LAGRANGE in seinen späteren didaktischen Schriften über Variationsrechnung[57]) diese EULERsche Methode seinen Entwicklungen zugrunde gelegt. Statt dessen geht GAUSS auf den Standpunkt von LAGRANGE und EULER vor der grundlegenden Arbeit von EULER[58]) vom Jahr 1771 zurück.

Damit hängt auch die Tatsache zusammen, dass GAUSS nicht ausdrücklich zwischen vollständiger Variation und erster Variation unterscheidet. Die Variationen δx, δy, δz sind ihm willkürliche »unendlich kleine« Funktionen von x, y, und die Grössen δW, δs, die tatsächlich erste Variationen sind, werden so behandelt, als ob sie vollständige Variationen wären. So schliesst er: Für ein Minimum muss $\delta W \geqq 0$ sein für alle unendlichkleinen mit der Gestalt des Gefässes vereinbaren Formveränderungen der Flüssigkeit, für die $\delta s = 0$. Das ist ohne weiteres klar für die vollständigen Variationen, nicht aber für die ersten Variationen. Hier liegt in der Tat eine fundamentale Lücke vor, die sich durch die ganze VORWEIERSTRASSsche Variationsrechnung hindurchzieht. Geht man nämlich von der Betrachtung einer Schar zulässiger Flächen

$$(60) \qquad \bar{x} = X(x, y, \varepsilon), \quad \bar{y} = Y(x, y, \varepsilon), \quad \bar{z} = Z(x, y, \varepsilon)$$

aus und definiert

$$(61) \qquad \delta x = \varepsilon X_\varepsilon(x, y, 0), \quad \delta y = \varepsilon Y_\varepsilon(x, y, 0), \quad \delta z = \varepsilon Z_\varepsilon(x, y, 0),$$

so genügen die Funktionen δx, δy, δz der Gleichung

$$(62) \quad \begin{cases} \delta s = 0 \\ \text{und überdies entlang der Begrenzung der Gleichung} \\ \delta z = g_x \delta x + g_y \delta y. \end{cases}$$

Der Schluss, dass

$$\delta W \geqq 0$$

sein muss für alle Funktionen δx, δy, δz, die den Gleichungen (62) genügen,

57) LAGRANGE, *Théorie des fonctions analytiques*, Oeuvres, Bd. IX, S. 298; *Leçons sur le calcul des fonctions*, Oeuvres, Bd. X, S. 400.

58) EULER, loc. cit. 3).

ist aber erst berechtigt, nachdem gezeigt ist, dass man zu jedem Funktionensystem δx, δy, δz, das den Gleichungen (62) genügt, eine Schar zulässiger Flächen (60) konstruieren kann, für welche die Gleichungen (61) bestehen.

Die Erkenntnis, dass die Betrachtung der ersten Variationen nicht ausreicht, dass es vielmehr nötig ist, von den ersten Variationen zu den vollständigen Variationen aufzusteigen, verdankt man WEIERSTRASS, und seitdem bildet die Herstellung von Scharen zulässiger Variationen bei allen strengen Beweisen, die sich auf Variationsprobleme mit Nebenbedingungen (Grenzbedingungen einbegriffen) beziehen, einen wesentlichen Teil der Untersuchung. Von alledem findet sich bei GAUSS noch nichts.

III. Abschnitt: Wirkungen der GAUSSschen Arbeit.

22. Bald nach der Veröffentlichung der GAUSSschen Arbeit (1830)[59]) setzten eine Reihe von umfangreichen und wichtigen Arbeiten über die allgemeine Theorie der Extrema von Doppel- und mehrfachen Integralen ein, die wir zum grössten Teil bereits im Vorhergehenden kurz erwähnt haben: BORDONI (1831), POISSON (1833; datiert 10. November 1831), PAGANI (1835; datiert 15. Dezember 1834), OSTROGRADSKY (1836; datiert 24. Januar 1834), DELAUNAY (1843; eingereicht vor 1. April 1842), CAUCHY[60]) (1844), SARRUS (1848; eingereicht vor 1. April 1842), LINDELÖF[61]) (1856).

Da drängt sich von selbst die Vermutung auf, dass die GAUSSsche Arbeit den Anstoss zu dieser ganzen Entwicklungsreihe gegeben hat. Demgegenüber ist jedoch zunächst festzustellen, dass keine dieser Arbeiten GAUSS erwähnt, mit Ausnahme derjenigen von PAGANI. Bei der damals üblichen Laxheit im Zitieren von Vorgängern beweist das allerdings nicht viel.

Im einzelnen ist zu sagen, dass bei BORDONI innere Gründe, die wir bereits oben (Nr. 16) angeführt haben, gegen die Annahme sprechen, dass er die GAUSSsche Arbeit gekannt habe. Auch dürfte die Abfassungszeit seiner Arbeit

---

59) Am 18. April 1830 schreibt GAUSS an SCHUMACHER: »Hierneben erhalten Sie einen der soeben mir zugegangenen Abdrücke meiner Principia generalia ...«, *Briefwechsel zwischen C. F. Gauss und H. C. Schumacher*, Bd. II, S. 230.

60) *Mémoires sur le calcul des variations,* Exercices d'analyse et de physique mathématique, T. III (1844), S. 50—130.

61) *Variationskalkylens theori och dess användning,* Helsingfors 1856.

kaum viel später als die Veröffentlichung der Gaussschen Arbeit fallen. Anders liegen die Dinge bei Poisson. Zwischen dem Erscheinen der Gaussschen Arbeit und der Datierung der Poissonschen liegen mehr als anderthalb Jahre. Da wäre es immerhin möglich, dass Poisson, der sich schon 1816 erfolgreich mit der Variation von Doppelintegralen beschäftigt hatte, ohne jedoch über die Schwierigkeiten der partiellen Integration hinauszukommen, bei Gauss die Lösung dieser Schwierigkeiten gefunden hätte und dadurch zur erneuten Inangriffnahme der Theorie der Extrema von Doppelintegralen veranlasst worden wäre. Eine gewisse Bestätigung erhält diese Vermutung dadurch, dass Poisson in der Vorrede zu seinem im Jahr 1831 erschienenen Buch *Nouvelle théorie de l'action capillaire* die Arbeit von Gauss zitiert[62]. Aber so lange das Datum dieser Vorrede und der Zeitpunkt, in dem Poisson seine grosse Arbeit über Variationsrechnung begonnen hat, unbekannt sind (und diese Daten werden jetzt wohl kaum mehr festzustellen sein), muss die Frage nach der Richtigkeit der obigen Vermutung unentschieden bleiben.

Pagani knüpft direkt an die Arbeit von Gauss an. Er stellt sich die Aufgabe, die Gaussschen Resultate aus der allgemeinen Theorie der Variation der mehrfachen Integrale herzuleiten, eine Theorie, die er in mehreren Punkten über Poisson hinaus weitergeführt hat. Er verallgemeinert zunächst die Lagrangesche Fundamentalformel (21) auf mehrfache Integrale, gibt dann weiter für zweifache und dreifache Integrale die Umformung der ersten Variation mittels partieller Integration auf Grund der Gaussschen Formeln (41) und (42) und wendet schliesslich seine allgemeinen Resultate auf das Gausssche Problem an, worüber wir noch weiter unten berichten werden. Hier liegt also eine unzweifelhafte, direkte Einwirkung von Gauss vor. Leider ist aber die Arbeit von Pagani in der Geschichte der Variationsrechnung kaum beachtet worden,

62) loc. cit. S. 7: »Depuis que cet ouvrage est écrit, j'ai eu connaissance d'un Mémoire de M. Gauss, qui parait en ce moment sous le titre de Principia generalia theoriae figurae fluidorum in statu aequilibrii (Gottingue 1830)«. Poisson gibt dann eine gedrängte Inhaltsangabe der Gaussschen Arbeit, die mit den Worten schliesst: »Par les règles connues du calcul des variations, on détermine la surface inconnue du liquide qui rend cette somme [nämlich die von Gauss mit W bezeichnete Summe] un minimum, et, comme on sait, on trouve à la fois l'équation générale de cette surface et l'équation particulière de son contour, ce qui est l'avantage caractéristique de la méthode que M. Gauss a suivie«. Hier sind die Worte »comme on sait« unverständlich, da man ja vor Gauss gerade nicht wusste, wie man die Randbedingungen erhalten sollte. Schon Todhunter hat seine Verwunderung darüber ausgesprochen, dass Poisson in seiner Variationsarbeit Gauss nicht erwähnt, wohl aber in der Kapillaritätsarbeit, vgl. Todhunter, loc. cit. 5), S. 54.

obgleich sie einen beträchtlichen Teil der Resultate von OSTROGRADSKY der Zeit der Veröffentlichung nach antizipiert hat. Im Gegensatz dazu zeigen die Arbeit von OSTROGRADSKY und die übrigen oben angeführten Arbeiten keine direkte Einwirkung von GAUSS; wohl aber sind sie ohne Zweifel direkt oder indirekt durch die Arbeit von POISSON angeregt worden.

Nach alledem hängt die Frage nach dem Umfang der Wirkung der GAUSSschen Arbeit auf die allgemeine Theorie der Extrema von mehrfachen Integralen ganz davon ab, ob die POISSONsche Arbeit durch GAUSS beeinflusst worden ist oder nicht. Im ersteren Fall hat GAUSS tatsächlich einen nachhaltigen Einfluss ausgeübt, indem er durch Vermittlung von POISSON den Anstoss zu der ganzen Reihe der oben genannten Arbeiten über Extrema von Doppelintegralen gegeben hat. Im entgegengesetzten Fall muss man aber sagen, dass die GAUSSsche Arbeit fast ohne allen Einfluss auf die Entwicklung der allgemeinen Theorie geblieben ist. Das muss man dann wohl dem Umstand zuschreiben, dass GAUSS selbst die Arbeiten seiner Vorgänger ganz unberücksichtigt gelassen hat, und dass seine Methoden allzusehr auf das spezielle in der Kapillaritätstheorie auftretende Variationsproblem zugeschnitten waren.

23. Die vorangegangenen Ausführungen bezogen sich auf die Wirkung der GAUSSschen Arbeit auf die allgemeine Theorie der Extrema von Doppelintegralen. Es bleibt uns nun noch übrig, über diejenigen Arbeiten zu berichten, die sich mit dem speziellen GAUSSschen Variationsproblem beschäftigen. Es handelt sich bei denselben im wesentlichen teils um Vereinfachungen, teils um Verallgemeinerungen der GAUSSschen Beweise.

Hier sind zunächst einige Arbeiten zu nennen, in denen die allgemeine Theorie der Variation der Doppelintegrale auf das GAUSSsche Variationsproblem angewandt wird, so PAGANI[63]) in der schon mehrfach erwähnten Arbeit und MAINARDI (1851) in einem Abschnitt einer grösseren Arbeit *Ricerche sul calcolo delle variazioni*[64]). Beide machen dabei keinen Gebrauch von der fertigen Formel (58)

---

63) PAGANI, loc. cit. 26), S. 96—99.

64) Annali di scienze matematiche e fisiche (TORTOLINI), Bd. III (1852), S. 187—190. MAINARDI macht dabei in der GREENschen Formel denselben Vorzeichenfehler wie BORDONI (Nr. 16) und erhält das richtige Endresultat nur dadurch, dass er diesen ersten Fehler durch einen zweiten in der Gleichung (59) (oben, S. 40) kompensiert.

von Bordoni und Poisson, sondern leiten die Randbedingung durch besondere Überlegungen her.

Demgegenüber erhält Jellett[65] (1850) die Randbedingung zwar nicht für das Gausssche Problem, das er merkwürdiger Weise nicht erwähnt, wohl aber für das allgemeinere Problem des Extremums des Doppelintegrals

$$\iint [\mu(x, y, z)\sqrt{1+p^2+q^2} + \mu'(x, y, z)]\, dx\, dy$$

unmittelbar durch Anwendung der Formel (58), wobei sich die Randbedingung mit einem Minimum von Rechnung in der Form

$$\frac{1 + pg_x + qg_y}{\sqrt{1+p^2+q^2}\sqrt{1+g_x^2+g_y^2}} = \text{Const.}$$

ergibt.

24. Am Schluss seiner Berechnung von δU (Art. 26) macht Gauss die Bemerkung, dass der Wert von δU leichter durch geometrische Betrachtungen hätte erhalten werden können. Eine solche mehr geometrische Lösung des Gaussschen Variationsproblems hat J. Bertrand (1848) geliefert[66]. Er denkt sich den Übergang von der Fläche U zur variierten Fläche $\overline{U}$ dadurch bewerkstelligt, dass jeder Punkt von U auf der durch ihn gehenden Normale um ein unendlich kleines Stück δn verschoben wird. Dadurch erhält man die Fläche $\overline{U}$ bis auf eine unendlich schmale Zone zwischen der Gefässwand und der von den Normalen entlang der Begrenzungskurve P gebildeten geradlinigen Fläche. Der Inhalt dieser Zone sei $\delta_2 U$, der übrige Teil von $\overline{U}$ sei $\overline{U}_1$. Um nun zunächst den Zuwachs $\delta_1 U = \overline{U}_1 - U$ zu berechnen, zerlegt Bertrand die Fläche U durch die beiden Scharen ihrer Krümmungslinien in Elemente, und folgert dann aus den Eigenschaften der Krümmungslinien die Proportion

$$\frac{d\overline{U}}{dU} = \frac{(R+\delta n)(R'+\delta n)}{RR'}, \tag{63}$$

woraus sich

$$\delta_1 U = \int dU.\delta n \cdot \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) \tag{64}$$

ergibt. Zur Berechnung von $\delta_2 U$ wird die oben näher definierte Zone der

65) loc. cit. 13a), S. 280.

66) *Mémoire sur la théorie des phénomènes capillaires,* Journal de Mathématiques, Bd. 13 (1848), S. 196—198; vgl. auch J. Bertrand, *Sur les surfaces isothermes orthogonales,* ebenda, Bd. 9 (1844), S. 119.

Fläche $\overline{U}$ durch Ebenen senkrecht zur Begrenzungskurve P in Elemente zerlegt. Eine einfache geometrische Infinitesimalbetrachtung liefert dann

$$\delta_2 U = -\int dP . \delta n . \mathrm{cotg}\, i.$$

Man erhält so zugleich eine geometrische Deutung für jedes der beiden Integrale, aus denen sich der Gausssche Ausdruck (45) für δU zusammensetzt. Durch dieselben Zerlegungen werden auch die Variationen der übrigen Glieder von δW und δs berechnet.

Eine etwas andere Ableitung der Gleichung (64) gibt E. Lamarle[67] (1863). Auch er verschiebt jeden Flächenpunkt entlang der Normale, aber er zerlegt das Flächenstück nicht durch die beiden Scharen seiner Krümmungslinien, sondern durch irgend zwei zu einander orthogonale Kurvenscharen in Elemente und berechnet die Variation des Flächeninhalts eines Elementes mit den Seiten $d\sigma$, $d\sigma'$ aus der Formel

$$\delta dU = d\sigma . \delta d\sigma' + d\sigma' . \delta d\sigma,$$

indem er auf $\delta d\sigma$ und $\delta d\sigma'$ die allgemeine Formel für die Variation eines Kurvenelementes bei normaler Verschiebung anwendet. — Nahe verwandt mit diesen Betrachtungen von Bertrand und Lamarle ist die Ableitung der Gaussschen Formel für δU, die H. Weber[68] (1903) in den Anmerkungen zur deutschen Ausgabe der Gaussschen Arbeit gegeben hat. Er weicht von Bertrand hauptsächlich darin ab, dass er die Fläche U nicht durch die beiden Scharen ihrer Krümmungslinien oder sonst auf eine spezielle Art zerlegt, sondern die Proportion (63) aus der Beziehung zwischen einem Flächenelement dU und dessen sphärischem Bild $d\omega$ ableitet: $dU = RR' d\omega$.

25. Am Schluss seiner Berechnung von δU (Art. 26) hebt Gauss ferner hervor, dass bei der ganzen Ableitung stillschweigend vorausgesetzt worden war, dass auf der ganzen Fläche U die Ordinate z eine eindeutige Funktion von x, y ist, und dass ζ beständig positiv ist. Er zeigt, wie man sich durch geeignete Zerlegung der Fläche von dieser beschränkenden Annahme befreien

---

67) *Exposé géométrique du calcul différentiel et intégral*, Mémoires couronnés et autres mémoires publiés par l'Académie de Belgique, Bd. XV (1863), S. 572—573. Lamarle erwähnt die Gausssche Formel (45) nicht.

68) Weber, loc. cit. 51), S. 69—70.

kann, und fügt hinzu, dass man denselben Grad der Allgemeinheit gleich von vornherein hätte erreichen können, wenn man eine etwas andere Methode angewandt hätte, womit er, wie schon H. WEBER bemerkt, ohne Zweifel die Behandlung des ganzen Problems in Parameterdarstellung gemeint hat. Für diese Form der Darstellung hat H. WEBER (1903) in den Anmerkungen zur deutschen Ausgabe der GAUSSschen Arbeit[69]) die Berechnung von δU durchgeführt. Aber schon vorher (1900) hatte KNESER in seinem *Lehrbuch der Variationsrechnung* (§§ 64, 65) die allgemeine Theorie der Extrema von Doppelintegralen in Parameterdarstellung auf das GAUSSsche Variationsproblem angewandt und damit wohl die an Allgemeinheit, Eleganz und Strenge vollendetste Lösung des Problems gegeben.

Bei dieser, wie es scheint, zuerst von WEIERSTRASS in seinen Vorlesungen angewandten Behandlungsweise werden die zulässigen Flächen in Parameterdarstellung angenommen, wie dies schon POISSON getan hatte. Aber im Gegensatz zu POISSON, dem die Parameterdarstellung nur ein vorübergehendes Hilfsmittel gewesen war, dessen er sich so bald als möglich wieder entledigte, wird hier an der Parameterdarstellung von Anfang bis zu Ende festgehalten. Dementsprechend wird das zu untersuchende Doppelintegral von vornherein in der Form

$$J = \iint \Phi(x, y, z;\ x_u, y_u, z_u;\ x_v, y_v, z_v)\, du\, dv$$

angenommen, wobei die Funktion Φ eine gewisse, zuerst von G. KOBB[70]) (1892) aufgestellte Bedingung erfüllen muss, damit der Wert des Integrals nur von der Fläche, nicht aber von der zufälligen Wahl des Parameters abhängt. Variiert werden nur die Funktionen x, y, z, nicht aber die unabhängigen Variabeln u, v.

Bei dem Integral U ist dann $\Phi = \sqrt{EG - F^2}$ zu setzen, woraus sich ohne Schwierigkeiten die GAUSSsche Formel (45) für δU ergibt. Dieselbe Formel wendet KNESER dann mutatis mutandis auch zur Berechnung von δT an, wie dies auch schon PAGANI getan hatte. Dabei ist nur zu beachten, dass hier $\cos(4, 5) = 0$, und dass an Stelle der Richtung 7 jetzt die der Richtung 8 entgegengesetzte Richtung tritt. Die dreifachen Integrale s und $\int z\, ds$ führt

69) WEBER, loc. cit. 51), S. 63—69.

70) *Sur les maxima et les minima des intégrales doubles,* Acta Mathematica, Bd. 16 (1892), S. 68.

Kneser mittels der Gaussschen Formel (42) auf Oberflächenintegrale zurück, die über die gesamte Oberfläche der Flüssigkeit, also über U und T zu erstrecken sind. So erhält er, wenn $d\sigma$ ein Element dieser Gesamtoberfläche ist, für s die im wesentlichen schon von Gauss gegebene Formel

$$s = \tfrac{1}{3}\int [x \cos(n, x) + y \cos(n, y) + z \cos(n, z)]\, d\sigma$$

und weiter

$$\int z\, ds = \int \frac{z^2}{2} \cos(n, z)\, d\sigma.$$

Für die schliessliche Ableitung der Randbedingung bedient sich Kneser eines der Lagrangeschen Multiplikatorenmethode nachgebildeten Verfahrens, das auch schon Pagani zu demselben Zweck angewandt hatte.

26. Wir haben in diesem Zusammenhang noch eine eigenartige und elegante Methode zu erwähnen, die H. Minkowski (1907) in seinem Encyklopädieartikel[71]) über Kapillarität zur Berechnung von δU angewandt hat.

Der Eulerschen Auffassung des Variationsprozesses entsprechend wird die Fläche U als Individuum einer Schar von Flächenstücken mit den Flächenparametern u, v und dem Scharparameter ε aufgefasst, wobei alle Flächenstücke demselben Bereich in der u, v-Ebene entsprechen. Als Parameterkurven werden nun auf allen Flächen der Schar die beiden Scharen von Krümmungskurven gewählt. Die Variabeln u, v, ε lassen sich dann auch als krummlinige Raumkoordinaten auffassen; für diese lässt sich das Quadrat des Linienelements auf die Form bringen

$$(65) \qquad dx^2 + dy^2 + dz^2 = L_1^2 (du - l_1\, d\varepsilon)^2 + L_2^2 (dv - l_2\, d\varepsilon)^2 + N^2 d\varepsilon^2.$$

Für irgend eine Fläche der Schar lautet dann der Ausdruck für den Flächeninhalt

$$U(\varepsilon) = \iint L_1 L_2\, du\, dv,$$

und daher ist

$$(66) \qquad \frac{dU(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \iint \left(L_1 \frac{\partial L_2}{\partial \varepsilon} + L_2 \frac{\partial L_1}{\partial \varepsilon} \right) du\, dv.$$

Zur Umformung des Integranden wird nunmehr durch eine geometrische Infinitesimalbetrachtung, bei der von der charakteristischen Eigenschaft der Krümmungslinien Gebrauch gemacht wird, und in deren Mittelpunkt die

71) *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*, Bd. V 1, S. 561—563.

Bertrandsche Proportionalität (63) steht, für die Hauptkrümmungsradien die Relation abgeleitet

$$\frac{N}{R} = \frac{1}{L_1}\left(\frac{\partial L_1}{\partial u} l_1 + \frac{\partial L_2}{\partial v} l_2 + \frac{\partial L_1}{\partial \varepsilon} + L_1 \frac{\partial l_1}{\partial \varepsilon}\right)$$

und eine analoge für R'. Aus beiden zusammen ergibt sich dann der folgende Ausdruck für die mittlere Krümmung

$$(67)\qquad L_1 L_2 N\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) = L_1 \frac{\partial L_2}{\partial \varepsilon} + L_2 \frac{\partial L_1}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial (L_1 L_2 l_1)}{\partial u} + \frac{\partial (L_1 L_2 l_2)}{\partial v}.$$

Setzt man jetzt in (66) für den Integranden den aus dieser Gleichung sich ergebenden Wert ein und macht von der Greenschen Formel Gebrauch, so erhält man nach leichter Rechnung die Gausssche Formel (45) für δU.

Übrigens hatte bereits H. A. Schwarz[72] unter etwas anderen spezialisierenden Voraussetzungen über die krummlinigen Koordinaten u, v, ε die der Minkowskischen Formel (67) entsprechende Formel rein analytisch abgeleitet. Er setzt allgemein

$$(68)\quad dx^2 + dy^2 + dz^2 = E du^2 + 2F du\, dv + G dv^2 + 2H du\, d\varepsilon + 2I dv\, d\varepsilon + K d\varepsilon^2$$

und macht dann die spezialisierende Annahme, dass $H = 0$, $I = 0$. Unter dieser Voraussetzung beweist er die Gleichung

$$(69)\qquad \sqrt{EG - F^2}\sqrt{K}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) = \frac{\partial \sqrt{EG - F^2}}{\partial \varepsilon}.$$

Sowohl die Minkowskische Formel (67) als die Schwarzsche Formel (69) sind übrigens als spezielle Fälle in der folgenden allgemeinen Formel enthalten, die für beliebige Flächenscharen ohne jede spezialisierende Voraussetzung unter Annahme des Quadrats des Linienelementes in der Form (68) gilt:

$$(70)\quad J\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\sqrt{EG - F^2} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{GH - FI}{\sqrt{EG - F^2}}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{EI - FH}{\sqrt{EG - F^2}}\right).$$

Dabei bedeutet J die Funktionaldeterminante

$$J = \frac{\partial (x, y, z)}{\partial (u, v, \varepsilon)}.$$

72) *Ueber ein die Flächen kleinsten Flächeninhalts betreffendes Problem der Variationsrechnung* (1885), Gesammelte mathematische Abhandlungen, Bd. I, S. 229—233; vgl. auch unten Nr. 27.

27. Während es sich bei den Untersuchungen, über die wir in den vorangehenden Nummern berichtet haben, darum handelte, die GAUSSschen Beweise zu vereinfachen oder zu verallgemeinern, haben wir nun zum Schluss noch einige Anwendungen zu besprechen, die von der GAUSSschen Formel für die Variation des Flächeninhalts auf Scharen von Minimalflächen gemacht worden sind.

Da ist zunächst der folgende Satz zu erwähnen, den LAMARLE[73]) (1863) aus der Formel (64) abgeleitet hat: »Es sei eine einparametrige Schar A von Minimalflächen gegeben; auf einer derselben ziehe man eine geschlossene Kurve und lege durch sie eine Fläche B, die sämtliche Flächen der Schar orthogonal schneidet. Alsdann haben die Flächenstücke, die durch die röhrenförmige Fläche B aus den verschiedenen Flächen der Schar A ausgeschnitten werden, alle denselben Flächeninhalt«.

Noch wichtiger für die Variationsrechnung ist ein hiermit nahe verwandter Satz von H. A. SCHWARZ[74]) (1885). SCHWARZ geht von der Bemerkung aus, dass der Ausdruck (45) für δU in dem besonderen Fall, wo U eine Minimalfläche ist, sich auf das Linienintegral reduziert und sich daher unter Benutzung von (46) schreiben lässt

$$\delta U = -\int \delta p . \cos i . dP, \tag{71}$$

wenn man mit δp die Projektion des Variationsvektors auf die Richtung 8 bezeichnet. SCHWARZ betrachtet nun eine einparametrige Schar von Minimalflächenstücken $U(\varepsilon)$, deren Begrenzungskurven $P(\varepsilon)$ sämtlich auf der Gefässwand liegen sollen. Ferner wird angenommen, dass keine zwei Minimalflächenstücke einen gemeinsamen Punkt haben sollen, wenn ε auf ein bestimmtes Intervall, etwa $(0, 1)$ beschränkt wird. Den Werten $\varepsilon = 0$ und $\varepsilon = 1$ mögen die Flächen U_0 und U entsprechen. Während ε von 0 bis 1 wächst, überdeckt die Schar der Begrenzungskurven $P(\varepsilon)$ einen gürtelförmigen Streifen F der Gefässwand T. Es wird jetzt der aufsteigenden Reihe

$$\varepsilon = 0,\ \varepsilon',\ \varepsilon'',\ \ldots,\ \varepsilon^{(n)},\ 1$$

entsprechend eine Reihe von Minimalflächenstücken

73) LAMARLE, loc. cit. 67), S. 576.

74) SCHWARZ, loc. cit. 72), S. 224—227. Wir haben uns in der Bezeichnung möglichst nahe an die Bezeichnung von GAUSS angeschlossen.

$$U_0,\ U',\ U'',\ \ldots\ U^{(n)},\ U \tag{72}$$

aus der Schar herausgegriffen. Für die Differenz der Flächeninhalte zweier aufeinanderfolgender Flächenstücke der Reihe gilt dann angenähert die Formel (71). Gleichzeitig wird durch die Begrenzungskurven der Flächenstücke (72) zusammen mit einer Anzahl von orthogonalen Trajektorien der Schar $P(\varepsilon)$ der Flächenstreifen F in Elemente geteilt; der Flächeninhalt dF eines solchen Elementes ist gegeben durch

$$dF = \delta p \,.\, dP.$$

Daraus folgt durch Summation und Grenzübergang

$$U - U_0 = -\int \cos i(\varepsilon)\, dF, \tag{73}$$

wobei das Oberflächenintegral über den Streifen F zu erstrecken ist, und $i(\varepsilon)$ den »Randwinkel« für die durch den Ort des Elementes dF gehenden Minimalfläche $U(\varepsilon)$ bedeutet.

Wenn insbesondere die Fläche U_0 auf einen Punkt zusammenschrumpft und dementsprechend der Streifen F in die Fläche T übergeht, so geht die Gleichung (73) über in

$$U = -\int \cos i(\varepsilon)\, dT,$$

erstreckt über die Fläche T; daraus folgt aber, wenn man noch: $\omega = \pi - i(\varepsilon)$ setzt, der Schwarzsche Fundamentalsatz

$$T - U = \int (1 - \cos \omega)\, dT.$$

Dieser Satz entspricht für das Problem der Minimalflächen dem Weierstrassschen Fundamentalsatz über die Darstellung der vollständigen Variation eines bestimmten Integrals durch die E-Funktion. Schwarz hat auch einen rein analytischen Beweis seines Satzes gegeben, der auf der in der vorigen Nummer erwähnten Formel (69) beruht.

II. Teil: Die Disquisitiones generales circa superficies curvas.

1. Die Beziehungen der *Disquisitiones generales circa superficies curvas* zur Variationsrechnung werden sämtlich durch die Theorie der geodätischen Linien vermittelt. Es kommen dabei in Betracht

1) die Ableitung der Differentialgleichung der geodätischen Linien (Art. 14, 18),
2) die Sätze über geodätische Polar- und Parallelkoordinaten (Art. 15, 16, 19, 22),
3) der Satz über die Totalkrümmung eines geodätischen Dreiecks (Art. 20).

A. Die Differentialgleichung der geodätischen Linien.

2. Die Geschichte der geodätischen Linien vor GAUSS ist von STÄCKEL[1]), ausführlich dargestellt worden; wir können uns daher darauf beschränken, diejenigen Stellen hervorzuheben, an denen GAUSS über seine Vorgänger hinausgegangen ist.

GAUSS hat die Differentialgleichung der geodätischen Linien auf zwei verschiedene Arten abgeleitet, indem er die Fläche das eine Mal durch eine Gleichung zwischen den Koordinaten gegeben sein lässt (Art. 14), das andere Mal in Parameterdarstellung annimmt (Art. 19).

a) Die Fläche ist durch eine Gleichung gegeben.

3. Hier schliesst sich GAUSS an LAGRANGE an. LAGRANGE hatte in den *Leçons sur le calcul des fonctions* (Ausgabe von 1806)[2]) die Differentialgleichung der geodätischen Linien aus dem Variationsproblem

$$\int \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\, dx = \text{Minimum}$$

1) P. STÄCKEL, *Bemerkungen zur Geschichte der geodätischen Linien,* Leipziger Berichte, Bd. 45 (1893), S. 444; vgl. auch G. ENESTRÖM, *Sur la découverte de l'équation générale des lignes géodesiques,* Bibliotheca mathematica (2), Bd. 13 (1899), S. 19 und P. STÄCKEL, *Gauss als Geometer,* Materialien für eine wissenschaftl. Biographie von Gauss, Heft 5, 1918 und Werke X 2, Abh. IV, Nr. 30; am Schluss der letztgenannten Arbeit befindet sich auch eine Bibliographie der GAUSSschen *Disquisitiones.*

2) Oeuvres de LAGRANGE, Bd. X, S. 435.

mit der Nebenbedingung

$$(1) \qquad F(x, y, z) = 0$$

in der Form erhalten

$$R \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{ds}\right) - Q \frac{d}{dx}\left(\frac{dz}{ds}\right) = 0,$$

wo

$$P = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad R = \frac{\partial F}{\partial z},$$

und daraus dann die Fundamentaleigenschaft der geodätischen Linien abgeleitet, dass die Schmiegungsebene der Kurve auf der Tangentialebene der Fläche senkrecht steht.

Gauss weicht hiervon nur darin ab, dass er die zulässigen Kurven in Parameterdarstellung annimmt und daher das Längenintegral in der Form ansetzt

$$\int \sqrt{\left(\frac{dx}{dw}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dw}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dw}\right)^2}\, dw.$$

Das hat den Vorteil, dass er die Differentialgleichung der geodätischen Linien in der symmetrischen Form

$$(2) \qquad \frac{d^2x}{ds^2} : \frac{d^2y}{ds^2} : \frac{d^2z}{ds^2} = P : Q : R$$

erhält, die unmittelbar die charakteristische Eigenschaft der geodätischen Linien ausdrückt.

Was die Strenge des Variationsschlusses anbetrifft, so geht Gauss nicht über Lagrange hinaus. Aus dem Verschwinden der ersten Variation in der Form

$$\int \left(\delta x\, d\left(\frac{dx}{ds}\right) + \delta y\, d\left(\frac{dy}{ds}\right) + \delta z\, d\left(\frac{dz}{ds}\right)\right) = 0$$

schliesst er mit einem »constat«, das sich offenbar auf Lagrange bezieht.

$$\delta x\, d\left(\frac{dx}{ds}\right) + \delta y\, d\left(\frac{dy}{ds}\right) + \delta z\, d\left(\frac{dz}{ds}\right) = 0.$$

Diese Gleichung führt dann mit der aus (1) folgenden Gleichung

$$P\delta x + Q\delta y + R\delta z = 0$$

auf die Proportion (2).

b) Die Fläche ist in Parameterdarstellung gegeben.

4. Bei der zweiten Herleitung der Differentialgleichung der geodätischen Linien, die GAUSS in Art. 19 gibt, wird die Fläche in Parameterdarstellung vorausgesetzt, und es handelt sich um ein Variationsproblem vom einfachsten Typus ohne Nebenbedingungen

$$\int \sqrt{E\,dp^2 + 2F\,dp\,dq + G\,dq^2} = \text{Minimum}. \tag{4}$$

GAUSS wählt q als unabhängige Variable und erhält so die folgende Differentialgleichung für p als Funktion von q

$$\frac{\partial E}{\partial p}dp^2 + 2\frac{\partial F}{\partial p}dp\,dq + \frac{\partial G}{\partial p}dq^2 = 2ds.d\frac{E\,dp + F\,dq}{ds}, \tag{5}$$

die er nach Ausführung der Differentiation und Einführung des Winkels θ, den die geodätische Linie mit der p-Richtung bildet, auf die Form bringt

$$\sqrt{EG - F^2}\,d\theta = \tfrac{1}{2}\frac{F}{E}dE + \tfrac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial q}dp - \frac{\partial F}{\partial p}dp - \tfrac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial p}dq. \tag{6}$$

Ganz ohne Vorgänger ist GAUSS allerdings auch hier nicht gewesen. Vielmehr hatte EULER[3]) nicht nur bereits 1744 für den speziellen Fall, dass die Fläche in der Form

$$z = f(x, y)$$

gegeben ist, die der Gleichung (5) entsprechende Differentialgleichung aus dem Variationsproblem

$$\int \sqrt{dx^2 + dy^2 + (T\,dx + V\,dy)^2} = \text{Minimum},$$

wo

$$dz = T\,dx + V\,dy$$

gesetzt ist, abgeleitet, sondern er hatte überdies in einer späteren Arbeit[4]) (1779) die Differentialgleichung auf die merkwürdige Form gebracht

$$\frac{ds}{1 + s^2} = \frac{dk}{(1 + k^2)\sqrt{1 + h^2}}, \tag{7}$$

---

3) L. EULER, *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes*, Lausanne 1744, S. 138.

4) L. EULER, *Accuratior evolutio problematis de linea brevissima in superficie quacunque ducenda*, Nova Acta Acad. Petropol., Bd. 15 (1799—1802), 1806, S. 46 (vorgelegt am 25. Jan. 1779).

wo

$$k = \frac{V}{T}, \quad h^2 = T^2 + V^2, \quad s\sqrt{1+h^2} = \frac{Vdx - Tdy}{Tdx + Vdy}.$$

Nun hat schon M. CANTOR[5] darauf aufmerksam gemacht, dass $s = \operatorname{cotg} w$ ist, wenn w den Winkel der geodätischen Linie mit der durch den betrachteten Punkt gehenden Kurve der Schar $z = \text{const.}$ bedeutet. Und in der Tat wird die GAUSSsche Formel (6) für den speziellen Fall einer Parameterdarstellung, bei der $z = q$ ist, mit der EULERschen Formel (7) identisch.

B. Die Sätze über geodätische Polar- und Parallelkoordinaten.

5. Die angeführten Stellen sind die einzigen, an denen GAUSS selbst unmittelbar die Variationsrechnung anwendet. Damit ist aber nur der allerkleinste Teil der Beziehungen zwischen den *Disquisitiones* und der Variationsrechnung angegeben.

Denn da das Problem der geodätischen Linien in der Form (4) als spezieller Fall in dem allgemeineren Variationsproblem enthalten ist, das Integral

$$J = \int F(x, y, x', y')\, dt, \tag{8}$$

$$x' = \frac{dx}{dt}, \quad y' = \frac{dy}{dt},$$

(wo die Funktion F in Bezug auf die Variabeln x', y' positiv-homogen von der ersten Dimension ist), durch eine Kurve

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

zu einem Extremum zu machen, so lassen sich alle Sätze über geodätische Linien in zwei Klassen einteilen:

1) solche, die spezielle Fälle von entsprechenden allgemeinen Sätzen über das genannte Variationsproblem sind, und

2) solche, bei denen dies nicht der Fall ist.

Nun gehören eine Reihe von GAUSSschen Sätzen über geodätische Linien in die erste Kategorie, und diese haben dann befruchtend auf die Variationsrechnung eingewirkt, insofern sie von späteren Autoren als spezielle Fälle von

---

5) M. CANTOR, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, Bd. 4, Leipzig 1908, S. 539. CANTOR schreibt $\operatorname{tg} w$ statt $\operatorname{cotg} w$.

allgemeinen Variationssätzen erkannt worden sind. Daran schliessen sich dann weiter solche Sätze, die, ohne direkt Verallgemeinerungen von GAUSSschen Sätzen zu sein, als »verwandte« Sätze zu bezeichnen sind, insofern sie mit jenen zusammen als spezielle Fälle unter ein und demselben allgemeineren Variationssatz enthalten sind.

1) Der Transversalensatz.

a) Der GAUSSsche Satz für geodätische Linien.

6. In erster Linie haben wir hier den GAUSSschen Satz über geodätische Polarkoordinaten (Art. 15) anzuführen: »Zieht man auf einer Fläche von demselben Ausgangspunkt aus nach allen Richtungen geodätische Linien von gleicher Länge, so schneidet die Verbindungskurve ihrer Endpunkte die sämtlichen geodätischen Linien senkrecht«, und den analogen Satz über geodätische Parallelkoordinaten (Art. 16): »Zieht man von den Punkten einer auf einer Fläche gegebenen Kurve unter rechtem Winkel und nach derselben Seite hin geodätische Linien von gleicher Länge, so schneidet die Verbindungskurve ihrer Endpunkte die sämtlichen geodätischen Linien senkrecht«. Wie schon GAUSS bemerkt hat, kann man den ersten Satz als Spezialfall des zweiten auffassen, indem man die gegebene Kurve auf einen Punkt (unendlich kleinen Kreis) zusammenschrumpfen lässt.

GAUSS' Beweis[6]) der beiden Sätze kommt darauf hinaus, dass er auf der Fläche geodätische Polar-, bezw. Parallelkoordinaten r, φ einführt und dann zeigt, dass für ein solches System von krummlinigen Koordinaten die (sonst von GAUSS mit F bezeichnete) Grösse

$$S(r,\varphi) = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial z}{\partial \varphi} \tag{9}$$

verschwindet. Denn die partielle Ableitung

$$\frac{\partial S}{\partial r} = \frac{\partial^2 x}{\partial r^2}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 y}{\partial r^2}\frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 z}{\partial r^2}\frac{\partial z}{\partial \varphi} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2\right)$$

verschwindet, weil nach der geometrischen Bedeutung von r als Bogenlänge einer geodätischen Linie einerseits

---

6) Dieser Beweis findet sich bereits in dem ersten Entwurf zu den *Disquisitiones* von Jahre 1825, *Neue allgemeine Untersuchungen über die krummen Flächen*, Art. 17, GAUSS' Werke, Bd. VIII, S. 437.

$$(10)\qquad \left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2=1$$

und andererseits auf Grund der Fundamentaleigenschaft (2) der geodätischen Linien auch die erste Summe verschwindet. Daher ist

$$(11)\qquad S(r,\varphi)=S(0,\varphi),$$

und die letztere Grösse ist null, wie sich für den zweiten Satz aus der Konstruktion, für den ersten aus dem oben angedeuteten Grenzübergang ergibt.

b) Der KNESERsche Transversalensatz.

7. Bei dem Versuch, diese Sätze auf das allgemeine Integral (8) auszudehnen, kommt nun alles darauf an, was man als Verallgemeinerung des senkrechten Schnittes einer geodätischen Linie durch eine schneidende Kurve aufzufassen hat. KNESER[7]) hat als solche den transversalen Schnitt der Extremale durch eine schneidende Kurve erkannt und dementsprechend als Verallgemeinerung des zweiten GAUSSschen Satzes den Transversalensatz erhalten: »Schneidet man auf den verschiedenen Extremalen einer Extremalenschar von ihren Schnittpunkten mit einer Transversale $\mathfrak{C}_0$ aus in positiver Richtung Bogen ab, die für das Integral J denselben konstanten Wert liefern, so ist die Verbindungskurve der Endpunkte dieser Bogen wieder eine Transversale der Schar«, und einen entsprechenden Satz für den speziellen Fall, wo die Ausgangskurve $\mathfrak{C}_0$ auf einen Punkt zusammenschrumpft. KNESER geht beim Beweis dieses Satzes von der Betrachtung eines Extremalenfeldes aus und leitet den Satz aus den weiter unten zu besprechenden HAMILTONschen Formeln (24) für die partiellen Ableitungen des Feldintegrals ab. Der Satz ist jedoch von der Voraussetzung, dass die betrachtete Extremalenschar ein Feld bildet, unabhängig und lässt sich ohne Benutzung der Formeln (24) durch eine unmittelbare Verallgemeinerung der GAUSSschen Schlussweise beweisen.

Es sei in der Tat eine Extremalenschar mit dem Parameter v gegeben und eine Kurve $\mathfrak{C}_0$, die jede Extremale der Schar in einem Punkt schneidet. Wenn dann die Funktion F entlang den Extremalen der Schar positiv ist, so kann man auf der Extremale v von ihrem Schnittpunkt Q mit der Kurve $\mathfrak{C}_0$ aus nach der positiven Seite hin einen Bogen QP abgrenzen, für den das Integral J einen vorgeschriebenen positiven Wert u annimmt. Die Koordinaten x, y

7) A. KNESER, *Lehrbuch der Variationsrechnung*, Braunschweig 1900, § 15.

des Punktes P sind dann eindeutige Funktionen von u und v

$$x = X(u, v), \quad y = Y(u, v), \tag{12}$$

und nach der Bedeutung von u ist, der Gleichung (10) entsprechend,

$$F(X, Y, X_u, Y_u) = 1. \tag{13}$$

Jetzt bilde man den Ausdruck

$$S(u, v) = F_{x'}(X, Y, X_u, Y_u) X_v + F_{y'}(X, Y, X_u, Y_u) Y_v, \tag{14}$$

dessen Verschwinden ausdrückt, dass die durch den Punkt P gehende Kurve $u = \text{const.}$ im Punkte P die Extremale QP transversal schneidet. Dann ist

$$\frac{\partial S}{\partial u} = \frac{\partial F}{\partial v} - \left[X_v\left(F_x - \frac{\partial}{\partial u} F_{x'}\right) + Y_v\left(F_y - \frac{\partial}{\partial u} F_{y'}\right)\right]. \tag{15}$$

Da die Kurve QP Extremale ist, ist dann

$$\frac{\partial S}{\partial u} = \frac{\partial F}{\partial v}, \tag{16}$$

also wegen (13): $\frac{\partial S}{\partial u} = 0$ und daher

$$S(u, v) = S(0, v). \tag{17}$$

Wenn nun insbesondere die Kurve $\mathfrak{C}_0$ eine Transversale der Extremalenschar ist, so ist $S(0, v) = 0$ und daher allgemein $S(u, v) = 0$, womit der Satz bewiesen ist.

c) Verwandte Sätze und weitere Verallgemeinerungen.

8. An den KNESERschen Transversalensatz, der als eine unmittelbare Verallgemeinerung des GAUSSschen Satzes erscheint, schliessen sich als »verwandte« Sätze in dem oben definierten Sinn der Satz über Parallelflächen an, der sich auf das Extremum des Integrals

$$\int \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt \tag{18}$$

bezieht, sowie der Satz von THOMSON und TAIT[8]) über Oberflächen gleicher

8) W. THOMSON und P. G. TAIT, *Treatise on Natural Philosophy*, Oxford 1867. Bd. 1, S. 244; deutsche Übersetzung von HELMHOLTZ und WERTHEIM unter dem Titel: *Handbuch der theoretischen Physik*, Bd. I, Teil I, Braunschweig 1871, S. 272.

Wirkung und der Satz von MALUS[9] für krummlinige Lichtstrahlen in einem Medium von stetig veränderlichem Brechungsindex, bei denen das vorige Integral durch das etwas allgemeinere

$$\int n(x, y, z)\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt$$

ersetzt ist.

Diese Sätze sind mit dem GAUSSschen Satz zusammen als Spezialfälle in dem Transversalensatz für das Integral

$$J = \int F(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_1', x_2', \ldots, x_n')\, dt \equiv \int F(x, x')\, dt \tag{19}$$

enthalten, wo wieder F positiv-homogen von der ersten Dimension in $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ ist. Hier handelt es sich dann im allgemeinsten Fall um eine m-parametrige Extremalenschar dieses Integrals $(1 \overline{\leqq} m \overline{\leqq} n-1)$ mit Parametern $v_1, v_2, \ldots, v_m$ und um eine m-dimensionale Mannigfaltigkeit

$$\mathfrak{C}_0 : x_k = \xi_k(v_1, v_2, \ldots, v_m), \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

welche die Extremalenschar transversal schneidet, d. h. für die im Schnittpunkt mit der Extremale $v_1, v_2, \ldots, v_m$ die m Gleichungen erfüllt sind

$$\sum_{i=1}^{n} F_{x_i'}(x, x') \frac{\partial \xi_i}{\partial v_h} = 0, \qquad h = 1, 2, \ldots, m.$$

Dementsprechend treten jetzt an Stelle der einen Funktion $S(u, v)$ die m Funktionen

$$S_h(u, v_1, v_2, \ldots, v_m) = \sum_{i=1}^{n} F_{x_i'}(X, X') \frac{\partial X_i}{\partial v_h}, \qquad h = 1, 2, \ldots, m, \tag{20}$$

wenn die gegebene Extremalenschar durch die Gleichungen

$$x_k = X_k(u, v_1, v_2, \ldots, v_m), \qquad k = 1, 2, \ldots, n$$

dargestellt ist und u die analoge Bedeutung hat wie oben, sodass also:

$$F(X, X') = 1.$$

Auch hier gilt dann die GAUSSsche Fundamentalgleichung

$$\frac{\partial S_h}{\partial u} = 0, \qquad h = 1, 2, \ldots, m, \tag{21}$$

woraus der Transversalensatz genau so folgt wie im Fall $n = 2$.

---

9) Zuerst von W. R. HAMILTON ausgesprochen, *Theory of systems of rays*, Transactions of the Royal Irish Academy, Bd. 15 (1828), Einleitung Nr. 106. Vgl. auch H. WEBER, *Ueber den Satz von Malus für krummlinige Lichtstrahlen*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Bd. 29 (1910), S. 404.

Ein weiterer »verwandter« Satz ist der Satz von MALUS und DUPIN[10]) über reflektierte und gebrochene geradlinige Strahlensysteme mit dem Zusatz von HAMILTON[11]), dass für den Fall von Reflexionen die Länge $\Sigma\rho$ des polygonalen Weges eines Lichtstrahls zwischen irgend zwei Orthogonalflächen konstant ist, während für den Fall von Brechungen $\Sigma\rho$ durch $\Sigma n\rho$ zu ersetzen ist, wenn n den Brechungsindex des betreffenden Mediums bedeutet.

2) Beziehungen zum Unabhängigkeitssatz.

9. Noch tiefer in den eigentlichen Kern der modernen Variationsrechnung führen uns die GAUSSschen Untersuchungen von Art. 21 und 22.

Ist ein Extremalenfeld für das Integral

$$J = \int F(x, y, x', y')\, dt \tag{8}$$

gegeben und eine Transversale $\mathfrak{C}_0$ desselben, bezeichnen ferner $p(x, y)$, $q(x, y)$ die Richtungskosinus der durch den Punkt x, y gehenden Extremale des Feldes im Punkt x, y und $V(x, y)$ das Feldintegral[12]) bezogen auf die Ausgangskurve $\mathfrak{C}_0$, so gelten für die partiellen Ableitungen der Funktion V die »HAMILTONschen Formeln«[13])

$$\frac{\partial V}{\partial x} = F_{x'}(x, y, p, q), \quad \frac{\partial V}{\partial y} = F_{y'}(x, y, p, q), \tag{24}$$

woraus sich einerseits die Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial F_{x'}(x, y, p, q)}{\partial y} = \frac{\partial F_{y'}(x, y, p, q)}{\partial x}, \tag{25}$$

andererseits durch Elimination von p, q die »JACOBI-HAMILTONsche partielle Differentialgleichung«

$$\Phi\left(x, y, \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}\right) = 0 \tag{26}$$

für die Funktion V ergibt. Von hier aus gelangt man dann unmittelbar zum

10) Über die Geschichte des Satzes vergleiche G. DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, Bd. II (Paris 1889), S. 280. Die erste Arbeit von MALUS stammt darnach aus dem Jahr 1808.

11) loc. cit. 9), Art. 13.

12) d. h. den Wert des Integrals J genommen entlang der durch den Punkt x, y gehenden Feldextremale von ihrem Schnittpunkt mit der Kurve $\mathfrak{C}_0$ aus bis zum Punkt x, y.

13) Als Spezialfall in den allgemeineren HAMILTONschen Formeln (35) enthalten, siehe HAMILTON, loc. cit. 9), First supplement, Bd. 16, Art. 3; vgl. auch KNESER, *Lehrbuch* (1900), §§ 15, 19.

Hinlänglichkeitsbeweis für ein Extremum des Integrals J, sei es mittels der WEIERSTRASSschen Konstruktion, sei es mittels des HILBERTschen invarianten Integrals

$$(27)\qquad J^* = \int [F_{x'}(x, y, p, q)\,dx + F_{y'}(x, y, p, q)\,dy].$$

Die ersten Keime dieser Theorie finden sich bereits bei GAUSS (Art. 22) sowie in der schon oben genannten, fast gleichzeitig mit den *Disquisitiones* erschienenen Arbeit von HAMILTON.

a) Die GAUSSschen Formeln.

10. GAUSS beweist in Art. 22 auf Grund seiner allgemeinen Resultate über den Übergang von einem System krummliniger Koordinaten p, q zu einem zweiten System p', q' für den speziellen Fall der geodätischen Parallelkoordinaten r, φ die Formeln

$$(28)\qquad \frac{\partial r}{\partial p} = \sqrt{E}\cos(\omega - \psi), \quad \frac{\partial r}{\partial q} = \sqrt{G}\cos\psi,$$

$$(29)\qquad E\left(\frac{\partial r}{\partial q}\right)^2 - 2F\frac{\partial r}{\partial p}\frac{\partial r}{\partial q} + G\left(\frac{\partial r}{\partial p}\right)^2 = EG - F^2.$$

Dabei ist r der senkrechte geodätische Abstand von einer festen Ausgangskurve $\mathfrak{C}_0$, also mit dem Feldintegral für das geodätische Integral (4) identisch; ψ ist der Winkel, welchen die durch den Punkt p, q gehende geodätische Linie der zu $\mathfrak{C}_0$ orthogonalen Schar im Punkte p, q mit der q-Richtung bildet, während ω den Winkel zwischen der p-Richtung und der q-Richtung im Punkt p, q bedeutet. Daraus geht hervor, dass die GAUSSsche Formel (29) mit der JACOBI-HAMILTONschen partiellen Differentialgleichung (26) für das Integral (4) identisch ist, wie schon F. MINDING erkannt hat[13a], während die Formeln (28) die HAMILTONschen Formeln (24) in unentwickelter Form darstellen. Um die vollständige Übereinstimmung zwischen beiden herzustellen, braucht man nur mit Hilfe der von GAUSS in Art. 17 gegebenen Formeln in (28) die trigonometrischen Funktionen von ω und ψ durch die drei Fundamentalgrössen E, F, G und die Differentiale dp, dq entlang der geodätischen Linie durch den Punkt p, q auszudrücken. Man erhält so in Übereinstimmung mit (24)

$$(30)\qquad \frac{\partial r}{\partial p} = \frac{E\,dp + F\,dq}{ds}, \quad \frac{\partial r}{\partial q} = \frac{F\,dp + G\,dq}{ds}.$$

13a) F. MINDING, *De formae, in quam geometra britannicus Hamilton integralia mechanices analyticae redegit, origine genuina*, Dorpat 1864, wieder abgedruckt Mathematische Annalen, Bd. 55 (1902), S. 119—135; vgl. insbesondere S. 122 und S. 131.

Explizite findet sich diese Formel (30) übrigens bei GAUSS nicht.

Bei der ganzen Untersuchung ist stillschweigend vorausgesetzt, dass man sich auf ein solches Stück der Fläche beschränkt, dass durch jeden Punkt dieses Stücks nur eine geodätische Linie senkrecht zur Ausgangskurve $\mathfrak{C}_0$ gezogen werden kann, sodass also die betrachtete Schar von geodätischen Linien ein Feld bildet.

b) Die Untersuchungen von BELTRAMI und HILBERT.

11. Die Formeln (30) wurden explizite zuerst von BELTRAMI[14]) in einer Arbeit aus dem Jahr 1868 angegeben und zusammen mit der partiellen Differentialgleichung (29) als spezielle Fälle allgemeiner Variationssätze erkannt und aus letzteren abgeleitet. BELTRAMI beweist[15]) zuerst die partielle Differentialgleichung (25) und schliesst daraus auf die Existenz einer Funktion $V(x, y)$, für welche die Gleichungen (24) und die partielle Differentialgleichung (26) bestehen. Diese Funktion V schreibt er in der Form des Linienintegrals (27); ihre geometrische Bedeutung als Feldintegral bleibt ihm jedoch für den allgemeinen Fall verborgen, da ihm der Begriff der Transversale noch fehlt. Diese allgemeinen Resultate wendet er dann auf den Fall der geodätischen Linien an. Er erhält so die Gleichungen (29) und (30) und zeigt nun für diesen speziellen Fall, dass hier die der Funktion V entsprechende Funktion die Bedeutung des senkrechten geodätischen Abstandes von einer orthogonalen Trajektorie der betrachteten Schar von geodätischen Linien besitzt.

Diese Arbeit von BELTRAMI scheint von Seiten der Variationsrechnung gänzlich unbeachtet geblieben zu sein. Erst mehr als dreissig Jahre später hat HILBERT[16]) dieselben Resultate aufs neue entdeckt und darauf seinen be-

---

14) E. BELTRAMI, *Sulla teoria delle linee geodetiche*, Rendiconti del Reale Istituto Lombardo (II), Bd. I (1868), S. 708; auch Opere matematiche, Bd. I, S. 366.

15) BELTRAMI und ebenso später HILBERT nehmen das Integral J nicht in der Parameterform (8) an, sondern mit x als unabhängiger Variabeln

$$J = \int f(x, y, y')\,dx, \quad y' = \frac{dy}{dx},$$

wo dann in den Formeln (24) bis (27) die Funktionen $F_{x'}$, $F_{y'}$ bezw. durch

$$f(x, y, p) - p f_{y'}(x, y, p), \quad f_{y'}(x, y, p)$$

zu ersetzen sind, wobei nunmehr p die Gefällfunktion des Feldes bedeutet.

16) D. HILBERT, *Mathematische Probleme*, Göttinger Nachrichten 1900, S. 292 und Archiv der Mathematik und Physik (3), Bd. 1 (1901), S. 231—236.

kannten Hinlänglichkeitsbeweis für ein Extremum des Integrals J gegründet. Aus der Darstellung von BELTRAMI geht nicht unzweideutig hervor, ob er den Anstoss zu seiner Untersuchung von GAUSS erhalten hat; doch darf man dies wohl als wahrscheinlich annehmen, und in diesem Fall würde sich nicht nur ein innerer logischer, sondern auch ein äusserer historischer Zusammenhang zwischen den GAUSSschen Untersuchungen und den Fundamentalsätzen der modernen Variationsrechnung ergeben.

c) Verwandte Untersuchungen von HAMILTON und weitere Verallgemeinerungen.

12. Mit den hier besprochenen Sätzen »verwandt« sind Untersuchungen über Strahlensysteme, die HAMILTON[17] fast gleichzeitig mit den GAUSSschen *Disquisitiones* veröffentlicht hat, und die sich auf das spezielle Variationsproblem

$$\int \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt = \text{Minimum}$$

beziehen. Eine gegenseitige Beeinflussung zwischen GAUSS und HAMILTON ist dabei ausgeschlossen, da die Arbeit von HAMILTON vom 3. Dezember 1824, die GAUSSsche vom 8. Oktober 1827 datiert ist und beide Arbeiten im Laufe des Jahres 1828 erschienen sind.

HAMILTON betrachtet ein Strahlensystem, von dem stillschweigend vorausgesetzt wird, dass es ein Feld bildet, und bezeichnet mit $\alpha(x, y, z)$, $\beta(x, y, z)$, $\gamma(x, y, z)$ die Richtungskosinus des Feldes, d. h. die Richtungskosinus des durch den Punkt x, y, z gehenden Strahls. Er beweist dann den Fundamentalsatz: »Soll das betrachtete Strahlensystem ein Normalensystem bilden, so muss der Differentialausdruck $\alpha(x, y, z)\,dx + \beta(x, y, z)\,dy + \gamma(x, y, z)\,dz$ das vollständige Differential einer Funktion $V(x, y, z)$ sein, die HAMILTON die charakteristische Funktion des Normalensystems nennt, sodass also

$$\alpha = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \beta = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \gamma = \frac{\partial V}{\partial z}. \tag{31}$$

Ist diese Bedingung erfüllt, so schneiden die Flächen $V = \text{const.}$ die Strahlen des Systems senkrecht. Die Funktion V ist nichts anderes als der senkrechte Abstand ρ des Punktes x, y, z von der Fläche $V = 0$ dieser Schar. Endlich genügt die Funktion V der partiellen Differentialgleichung

17) W. R. HAMILTON, loc. cit. 9), Art. 8, 9, 19, 20.

$$(32) \qquad \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 = 1.$$

Weiter beweist HAMILTON folgende partielle Differentialgleichungen für die Funktionen α, β, γ

$$(33) \qquad \begin{cases} \qquad\qquad\qquad \beta\left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial x}\right) + \gamma\left(\frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x}\right) = 0, \\ \alpha\left(\frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y}\right) \qquad\qquad\qquad + \gamma\left(\frac{\partial \beta}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial y}\right) = 0, \\ \alpha\left(\frac{\partial \gamma}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial z}\right) + \beta\left(\frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z}\right) \qquad\qquad\qquad = 0, \end{cases}$$

aus denen sich ein zweiter Beweis des Fundamentalsatzes ergibt.

In den späteren Teilen seiner grossen Arbeit über Strahlensysteme hat HAMILTON[18] seine Untersuchungen auf den weit allgemeineren Fall des Extremums des Integrals

$$\int n\left(x, y, z, \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right) ds$$

ausgedehnt[19], d. h. des Integrals (19) für $n = 3$.

13. Diese Sätze von HAMILTON sind mit den oben angeführten Sätzen von GAUSS, BELTRAMI, HILBERT und KNESER zusammen als Spezialfälle in den folgenden allgemeinen Sätzen[20] über die Extremalen des Integrals

18) loc. cit. 9), First supplement, Bd. 16, Part I (1830); Second supplement, Bd. 16, Part II (1831, datiert 1830); Third supplement, Bd. 17 (1837, datiert 1832).

19) Hierauf macht G. PRANGE aufmerksam in seiner Habilitationsrede, W. R. HAMILTONS *Bedeutung für die geometrische Optik*, Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung, Bd. 30 (1921), S. 72. Vgl. dazu auch die Arbeit von G. PRANGE, *W. R. Hamiltons Arbeiten zur Optik und Mechanik. Ihre Bedeutung und ihr Einfluss auf die Entwicklung dieser Wissenschaften*, die demnächst in den Acta der Leopoldinisch-Carolinischen Akademie der Naturforscher erscheinen wird.

20) Für $n = 3$ bereits bei HAMILTON, loc. cit. 18); wegen der Verallgemeinerung der Theorie auf das LAGRANGEsche Problem vgl.: A. MAYER, *Ueber den Hilbertschen Unabhängigkeitssatz in der Theorie der Maxima und Minima der einfachen Integrale*, Leipziger Berichte, Bd. 55 (1903), S. 131—145 und Bd. 57 (1905), S. 49—67, 313—314; D. HILBERT, *Zur Variationsrechnung*, Göttinger Nachrichten 1905, S. 159—180; H. HAHN, *Ueber den Zusammenhang zwischen den Theorien der zweiten Variation und der Weierstrassschen Theorie der Variationsrechnung*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Bd. 29 (1910), S. 49—78; O. BOLZA, *Ueber den Hilbertschen Unabhängigkeitssatz beim Lagrangeschen Variationsproblem*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Bd. 31 (1911), S. 257—272; J. RADON, *Zur Theorie der Mayerschen Felder beim Lagrangeschen Variationsproblem*, Wiener Berichte, Bd. 120 (1911), S. 1337—1360. Vergl. auch die Darstellung im ersten Teil der Dissertation von G. PRANGE, *Die Hamilton-Jacobische Theorie für Doppelintegrale (mit einer Uebersicht der Theorie für einfache Integrale)*, Göttingen 1915.

$$(19) \qquad \int F(x_1, x_2, \ldots, x_n, x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)\, dt \equiv \int F(x, x')\, dt$$

enthalten: Damit eine $(n-1)$-parametrige Extremalenschar des Integrals (19), die ein Feld bildet, eine Transversalhyperfläche besitzt, muss der Differentialausdruck

$$(34) \qquad \sum_{i=1}^{n} F_{x'_i}(x, p)\, dx_i,$$

in dem $p_1, p_2, \ldots, p_n$ die »Richtungskosinus« der durch den Punkt $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gehenden Feldextremale sind, das vollständige Differential einer Funktion $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sein, sodass also

$$(35) \qquad F_{x'_k}(x, p) = \frac{\partial V}{\partial x_k}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Ist diese Bedingung erfüllt, in welchem Fall das Feld ein Mayersches genannt wird, so schneiden die sämtlichen Hyperflächen $V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \text{const.}$ die Extremalenschar transversal. Die Funktion V ist mit dem Feldintegral gerechnet von der Hyperfläche $V = 0$ identisch. Die Richtungskosinus des Feldes $p_1, p_2, \ldots, p_n$ genügen den die Gleichungen (25) und (33) als Spezialfälle enthaltenden partiellen Differentialgleichungen

$$(36) \qquad \sum_{i=1}^{n} p_i \left(\frac{\partial F_{x'_k}(x, p)}{\partial x_i} - \frac{\partial F_{x'_i}(x, p)}{\partial x_k} \right) = 0.$$

Die den partiellen Differentialgleichungen (26), (29), (32) entsprechende partielle Differentialgleichung ergibt sich durch Elimination von $p_1, p_2, \ldots, p_n$ aus den n Gleichungen (35) zusammen mit der Relation: $p_1^2 + p_2^2 + \cdots + p_n^2 = 1$.

Die angeführten Sätze sind als Spezialfälle in entsprechenden allgemeineren über das sogenannte Lagrangesche Problem enthalten, auf das sich die in Fussnote 20) zitierten Arbeiten beziehen. Eine noch weitergehende Verallgemeinerung auf das sogenannte Mayersche Problem hat neuerdings Kneser[20a]) gegeben.

20a) A. Kneser, *Beiträge zur Theorie der Variationsrechnung: Die Methode von Weierstrass im Zusammenhang mit der Jacobi-Hamiltonschen und einer Integrationstheorie von Cauchy,* Archiv der Mathematik und Physik (3), Bd. 24 (1915), S. 26—57. Nach G. Prange (Habilitationsrede, loc. cit. 19), S. 72 hat sogar schon Hamilton seine allgemeine Methode auf ein Mayersches Variationsproblem angewandt in der Arbeit *Calculus of principal relations,* Reports of the British Association for the advanc. of science 5 (1836, pt. 2), S. 41—44.

3) Der Darboux-Knesersche Hinlänglichkeitsbeweis.

14. Einen weiteren wichtigen Anstoss hat die Variationsrechnung von der Gaussschen Normalform für das Linienelement (Art. 19, 22) bei Zugrundelegung von geodätischen Polar- oder Parallelkoordinaten erhalten. Auf diese Normalform hat nämlich Darboux[21] einen einfachen Hinlänglichkeitsbeweis für die geodätische Linie als kürzeste Linie zwischen zwei Punkten auf einer Fläche gegründet: Ist AB ein Bogen einer geodätischen Linie von der Länge r_1, so mache man den Punkt A zum Anfangspunkt eines Systems geodätischer Polarkoordinaten r, φ. Zieht man dann auf der Fläche von A nach B irgend eine zweite Kurve, so ist deren Länge nach Gauss gegeben durch das Integral

$$\int_0^{r_1} \sqrt{dr^2 + m^2\, d\varphi^2}$$

und dieses Integral ist sicher grösser als die Länge

$$r_1 = \int_0^{r_1} dr$$

des geodätischen Bogens AB. Der Beweis setzt voraus, dass die zu vergleichenden Kurven im Innern eines Bereichs liegen, in dem keine zwei der von A ausgehenden geodätischen Linien sich zum zweiten Mal schneiden, eine Voraussetzung, die mit der Jacobischen Bedingung äquivalent ist. Denselben Schluss hat Darboux[22] auch noch auf das Aktionsintegral

$$\int \sqrt{2(U+h)}\, ds$$

für die ebene Bewegung eines materiellen Punktes angewandt.

15. Diesen Darbouxschen Gedanken hat dann später Kneser[23] zu einem Hinlänglichkeitsbeweis für das Extremum des allgemeinen Integrals

$$J = \int F(x, y, x', y')\, dt \tag{8}$$

weiter entwickelt und zwar nicht nur für den Fall fester Endpunkte, sondern

21) G. Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, Bd. 2, (Paris 1889), Nr. 521. Der Grundgedanke der Methode findet sich übrigens schon bei F. Minding (1864) in der in Fussnote 13a) zitierten Arbeit; vgl. darüber Fussnote 23b).

22) G. Darboux, loc. cit. 21), Nr. 545.

23) Kneser, *Lehrbuch*, § 16.

auch für den Fall, wo einer der beiden Endpunkte fest, der andere auf einer gegebenen Kurve beweglich ist. KNESER führt dazu in das Integral J statt der rechtwinkligen Koordinaten x, y krummlinige Koordinaten u, v ein durch eine Transformation

$$x = X(u, v), \quad y = Y(u, v), \tag{12}$$

bei der die Kurven $v =$ const. eine ein Feld bildende Extremalenschar des Integrals J sind, die Kurven $u =$ const. dagegen die Transversalen dieser Schar. Dadurch geht das Integral J in ein neues Integral

$$J' = \int G(u, v, u', v')\,dt$$

von demselben Typus über, wobei wegen des speziellen Charakters der Transformation (12) die Funktion G — entsprechend den Relationen $E = 1$, $F = 0$ im Fall der geodätischen Linien — den folgenden Relationen genügt

$$G(u, v, u', 0) = u', \quad G_{v'}(u, v, u', 0) = 0. \tag{38}$$

Betrachtet man jetzt in der x, y-Ebene einen Extremalenbogen AB, definiert durch $u_0 \overline{\gtrless} u \overline{\gtrless} u_1$, $v = v_0$, und eine beliebige zweite Kurve CB, die von irgend einem Punkte C der durch den Punkt A gehenden Transversale $u = u_0$ nach demselben Endpunkt B führt und ganz im Felde verläuft, und sind $A'B'$, bezw. $C'B'$ die Bilder der beiden Kurven in der u, v-Ebene, so ist der Zuwachs ΔJ, den das Integral J beim Übergang von AB zu CB erfährt, gleich dem Zuwachs $\Delta J'$, den das Integral J' beim Übergang von $A'B'$ zu $C'B'$ erfährt. Nun ist aber

$$\Delta J' = \int_{t_0}^{t_1} G(u, v, u', v')\,dt - (u_1 - u_0),$$

das Integral genommen entlang der Kurve $C'B'$, und da wegen der Lage der Endpunkte des Bogens CB: $u(t_0) = u_0$, $u(t_1) = u_1$ ist, kann man schreiben

$$u_1 - u_0 = \int_{t_0}^{t_1} u'\,dt$$

und so die totale Variation $\Delta J'$ in ein über die Kurve $C'B'$ genommenes Integral verwandeln

$$\Delta J' = \int_{t_0}^{t_1} [G(u, v, u', v') - u']\,dt. \tag{39}$$

Aus den Eigenschaften (38) der Funktion G lassen sich nun aber Schlüsse auf das Vorzeichen des Integranden ziehen, die zu hinreichenden Bedingungen für ein Extremum des Integrals J' und damit zugleich des Integrals J führen. Übrigens folgt aus den Relationen (38) zugleich, dass die Gleichung (39) nichts anderes ist als der WEIERSTRASSsche Ausdruck der vollständigen Variation durch die E-Funktion, angewandt auf das Integral J'.

Neuerdings hat KNESER seine hier kurz skizzierte Verallgemeinerung der GAUSSschen Theorie der geodätischen Linien auf das sogenannte MAYERsche Problem ausgedehnt[23a]. Da in dieser Arbeit eine unmittelbare und starke Einwirkung von GAUSS vorliegt, so mag hier noch kurz darüber berichtet werden, jedoch unter Beschränkung auf den einfachsten Fall des MAYERschen Problems mit zwei unbekannten Funktionen y, z von x, zwischen denen eine Differentialgleichung besteht. Die Anfangswerte x_0, y_0, z_0 sind gegeben, ebenso die Endwerte x_1, y_1; der Endwert z_1 soll zu einem Extremum gemacht werden.

Indem x, y, z als Funktionen eines Parameters t gedacht werden, wird die gegebene Differentialgleichung in der Form angenommen

$$z' = F(x, y, z, x', y'),$$

wobei F homogen von der ersten Dimension in x', y' ist.

KNESER betrachtet nun eine einparametrige Extremalenschar

$$(12') \qquad x = X(t, a), \quad y = Y(t, a), \quad z = Z(t, a),$$

und bildet, der GAUSSchen Funktion S entsprechend, den Ausdruck

$$(14') \qquad S(t, a) = \Omega_{x'} X_a + \Omega_{y'} Y_a + \Omega_{z'} Z_a,$$

wobei

$$\Omega = \lambda(z' - F(x, y, z, x', y'))$$

und die Argumente der Ableitungen von Ω sich auf die Extremalenschar (12') beziehen. Er beweist dann, der Gleichung (15) entsprechend, die Gleichung

$$(15') \qquad \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

und daraus den Satz: Wenn die Extremalenschar (12') von einer Kurve trans-

[23a] *Die Gausssche Theorie der geodätischen Linie übertragen auf das Mayersche Problem der Variationsrechnung*, Journal für r. u. a. Math., Bd. 146 (1915), S. 116.

versal geschnitten wird, so wird sie von jeder sie überhaupt schneidenden Kurve transversal geschnitten. Dabei ist »transversal« so zu verstehen, dass eine Kurve

$$x = X(\tau(a), a) = \tilde{x}(a), \quad y = Y(\tau(a), a) = \tilde{y}(a), \quad Z(\tau(a), a) = \tilde{z}(a)$$

die Extremalenschar (12') transversal schneidet, wenn

$$\Omega_{x'}\tilde{x}_a + \Omega_{y'}\tilde{y}_a + \Omega_{z'}\tilde{z}_a \Big|^{t=\tau(a)} = 0.$$

Den Gaussschen geodätischen Parallelkoordinaten entsprechend führt nun Kneser auf folgende Weise in der x, y-Ebene krummlinige Koordinaten u, v ein: Er nimmt in der x, y-Ebene eine beliebige Kurve $\mathfrak{K}$ an und errichtet in ihren Punkten Senkrechte $z = z_0$, deren Endpunkte eine Raumkurve $\mathfrak{K}'$ bilden. Dann kann man stets eine einparametrige Extremalenschar (12') bestimmen, die von dieser Raumkurve transversal geschnitten wird. Alsdann schneiden nach dem obigen Satz die sämtlichen Schnittkurven der Ebenenschar $z = \text{const.}$ mit der Extremalenschar die letztere ebenfalls transversal. Die Projektionen einerseits der Extremalen, andererseits dieser Schnittkurven auf die x, y-Ebene liefern dann das die krummlinigen Koordinaten u, v bestimmende Kurvensystem $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ in der x, y-Ebene.

Nach Einführung von u, v an Stelle von x, y nimmt die Differentialgleichung für z die Form an:

$$z' = G(u, v, z, u', v'),$$

wobei G wieder homogen von der ersten Dimension in u', v' ist und, den Gleichungen (38) entsprechend, die beiden charakteristischen Eigenschaften besitzt

$$(38') \qquad G(u, v, u, 1, 0) = 1, \quad G_{v'}(u, v, u, 1, 0) = 0,$$

aus denen dann Kneser für die vollständige Variation des Endwertes z_1, der Gleichung (39) entsprechend, einen Ausdruck herleitet, aus dem auf das Vorzeichen dieser vollständigen Variation geschlossen werden kann, und zwar nicht nur für den Fall gegebener Anfangswerte x_0, y_0, z_0, sondern auch für den Fall, wo der Punkt x_0, y_0 sich frei auf der Kurve $\mathfrak{K}$ bewegen kann.

In einer andern Richtung hat F. MINDING[23b] die GAUSSsche Normalform für das Quadrat des Linienelementes verallgemeinert, indem er die Aufgabe löst, eine positive quadratische Differentialform von n Variabeln $p_1, p_2, \ldots, p_n$ in eine Summe von n Quadraten von linearen Differentialformen zu verwandeln, von denen eine ein vollständiges Differential ist:

$$\Omega\, dt^2 \equiv \sum_{i,k} E_{ik}\, dp_i\, dp_k = (dV)^2 + (L_1^2 + L_2^2 + \cdots + L_{n-1}^2)\, dt^2,$$

wobei

$$L_i = C_{ii}\, dp_i + C_{i,i+1}\, dp_{i+1} + \cdots + C_{in}\, dp_n,$$

während die Grössen E_{ik} gegebene, die Grössen V, C_{ik} gesuchte Funktionen von $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sind.

Von seinen Resultaten macht er dann eine Anwendung auf das Variationsproblem, das Integral

$$(19') \qquad \int \sqrt{\Omega}\, dt$$

zu einem Minimum zu machen. Er beschränkt sich zwar dabei auf eine kurze Andeutung; aus derselben geht jedoch hervor, dass ihm bereits im Jahre 1864 der Grundgedanke des späteren DARBOUX-KNESERschen Hinlänglichkeitsbeweises geläufig war.

C. Die geodätische Krümmung und der Satz über die Totalkrümmung.

1. Die geodätische Krümmung und ihre Verallgemeinerung.

16. Die geodätische Krümmung kommt zwar in den *Disquisitiones generales circa superficies curvas* nicht vor, wohl aber in einer früheren, vermutlich aus der Zeit zwischen 1822 und 1825 stammenden Arbeit, die als Vorarbeit

---

23b) loc. cit. 13a); die auf das Minimum des Integrals (19') bezügliche Stelle findet sich auf S. 131 und lautet mit einigen Auslassungen: »Verum fundamentum huius doctrinae manifesto positum est in discreptione aggregati $\Omega\, dt^2$ in plura quadrata, quarum unum radicem habet per se integrabilem. Quae discreptio non solum aequationes differentiales minimi, quae nostris in signis erunt $L_1 = 0$, $L_2 = 0$, ..., $L_{p-1} = 0$, ipsumque minimum $\int dV$, verum etiam terminos, ultra quos integrationem extendere, nisi cessante minimo, non licet, non indicare nequit«.

In demselben Zusammenhang ist auch zu erwähnen R. LIPSCHITZ, *Untersuchung eines Problems der Variationsrechnung, in welchem das Problem der Mechanik enthalten ist,* Journal für die r. u. a. Mathematik, Bd. 74 (1872), S. 116—149, besonders S. 119 und 129.

zu den *Disquisitiones* zu betrachten ist, und die sich in GAUSS' Nachlass gefunden hat[24]). GAUSS definiert darin die geodätische Krümmung — oder, wie er sagt, die »Seitenkrümmung« — einer auf einer Fläche gelegenen Kurve als das Produkt der absoluten Krümmung der Kurve in dem betrachteten Punkt in den Sinus des Winkels ψ zwischen der Richtung der Hauptnormale der Kurve und der (negativen) Flächennormale

$$K_g = \frac{\sin\psi}{r}.$$

Er berechnet ihren Wert für den Fall, dass die Fläche durch zwei Parameter p, q dargestellt und die Kurve auf der Fläche dadurch gegeben ist, dass p und q als Funktionen einer unabhängigen Variabeln t angenommen werden[25]). Als Resultat erhält er den bekannten, später zuerst von MINDING[26]) veröffentlichten Ausdruck für die geodätische Krümmung, in dem ausser den ersten und zweiten Ableitungen von p und q nach t nur die Fundamentalgrössen erster Ordnung E, F, G und ihre ersten Ableitungen nach p und q vorkommen.

Die Beziehungen zwischen der geodätischen Krümmung und der Variationsrechnung ergeben sich nun, wenn man die WEIERSTRASSsche Formel für die erste Variation des allgemeinen Integrals (8)

$$(8) \qquad J = \int_{t_0}^{t_1} F(x, y, x', y')\,dt,$$

nämlich

$$\delta J = \left[F_{x'}\delta x + F_{y'}\delta y\right]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} T\,(y'\delta x - x'\delta y)\,dt,$$

worin

$$T = F_{xy'} - F_{yx'} + F_1(x'y'' - y'x''),$$
$$F_1 = \frac{F_{x'x'}}{y'^2} = -\frac{F_{x'y'}}{x'y'} = \frac{F_{y'y'}}{x'^2},$$

auf das Längenintegral (4)

$$(4) \qquad s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{Ep'^2 + 2Fp'q' + Gq'^2}\,dt$$

---

24) C. F. GAUSS, Werke, Bd. VIII, S. 386—395. Wegen der Datierung vergleiche die Bemerkung von STÄCKEL, ebenda S. 395.

25) GAUSS schreibt t, θ; u; P, Q, R; χ statt p, q; t; E, F, G; θ.

26) F. MINDING, *Bemerkungen über die Abwickelung krummer Linien auf Flächen,* Journal für r. u. a. Mathematik, Bd. 6 (1830), S. 160.

anwendet. Man erhält dann[27])

$$T = \sqrt{EG - F^2}\, K_g$$

und daraus für die erste Variation des Bogens[28]):

$$(41) \qquad \delta s = [\cos\varphi\, \delta e]_{s_0}^{s_1} - \int_{s_0}^{s_1} K_g \sin\varphi \,.\, \delta e \,.\, ds,$$

wo φ den Winkel zwischen der Kurventangente und dem Variationsvektor $(\delta x, \delta y, \delta z)$ bedeutet und

$$\delta e = \sqrt{(\delta x)^2 + (\delta y)^2 + (\delta z)^2}.$$

Für den speziellen Fall

$$\varphi = -\frac{\pi}{2}, \quad \delta e = 1$$

vereinfacht sich der Ausdruck (41) zu der Formel

$$(42) \qquad \delta s = \int_{s_0}^{s_1} K_g\, ds,$$

auf die LANDSBERG[29]) seine »innere« Definition der geodätischen Krümmung gründet.

Als Verallgemeinerung der geodätischen Krümmung beim Übergang von dem Längenintegral (4) zu dem allgemeinen Integral (8) erscheint daher der Ausdruck

$$(43) \qquad K_e = \frac{T}{F_1^{\frac{1}{2}} F^{\frac{3}{2}}},$$

den LANDSBERG deshalb die »extremale Krümmung« der betrachteten Kurve im Punkt x, y nennt. Sie ist eine absolute Invariante[30]) sowohl gegenüber allen Punkttransformationen der x, y-Ebene und ihren Erweiterungen als auch gegenüber allen Parametertransformationen des Kurvenparameters t, worin die

27) Vgl. O. BOLZA, *Lectures on the Calculus of Variations*, Chicago 1904, S. 129.

28) T. J. I'A. BROMWICH, Bulletin of the American Mathematical Society, Bd. 9 (1905), S. 547.

29) G. LANDSBERG, *Ueber die Krümmung in der Variationsrechnung*, Mathematische Annalen, Bd. 65 (1908), S. 316.

30) G. LANDSBERG, loc. cit. 29), S. 329 und A. L. UNDERHILL, *Invariants of the Function $F(x, y, x', y')$ in the Calculus of Variations*, Transactions of the American Mathematical Society, Bd. 9 (1908), S. 332, 337. Vgl. ferner P. FUNK, Mathematische Zeitschrift, Bd. 3 (1919), S. 87.

entsprechenden Invarianteneigenschaften der geodätischen Krümmung als Spezialfall enthalten sind.

2. Der Gausssche Satz über die Totalkrümmung und seine von Bonnet gegebene Verallgemeinerung.

17. Im letzten Abschnitt[31]) der in der vorigen Nummer genannten nachgelassenen Arbeit gibt Gauss eine merkwürdige Umformung des von ihm für die geodätische Krümmung gefundenen Ausdrucks, die den eigentlichen Kern nicht nur des Gaussschen Satzes über die Totalkrümmung, sondern auch seiner später von Bonnet[32]) gegebenen Verallgemeinerung enthält. Der ursprünglich von Gauss für die geodätische Krümmung abgeleitete Ausdruck hat die folgende Gestalt

$$(44)\qquad K_g\,ds = \frac{\sqrt{EG-F^2}\,(p'dq'-q'dp')}{Ep'^2+2Fp'q'+Gq'^2} + \frac{\Phi(p,q,p',q')\,dt}{(Ep'^2+2Fp'q'+Gq'^2)\sqrt{EG-F^2}},$$

wobei Φ eine kubische Form der Variabeln p', q' ist, deren Koeffizienten rationale Funktionen von E, F, G und ihren ersten Ableitungen nach p und q sind. Nun macht Gauss die wichtige Bemerkung, dass für das Differential des Winkels θ zwischen der positiven p-Richtung und der positiven Tangente der Kurve in dem betrachteten Punkt ein genau analoger Ausdruck gilt, der sich von dem obigen nur dadurch unterscheidet, dass darin die Funktion Φ durch eine andere kubische Form von p', q' ersetzt ist, sodass also bei Subtraktion beider Ausdrücke das erste, die zweiten Ableitungen von p und q enthaltende Glied herausfällt und man ein Resultat der folgenden Form erhält

$$(45)\qquad K_g\,ds - d\theta = \frac{\Psi(p,q,p',q')\,dt}{(Ep'^2+2Fp'q'+Gq'^2)\sqrt{EG-F^2}},$$

wo Ψ eine neue kubische Form von p', q' bedeutet.

Darüber hinaus konstatiert nun Gauss die überraschende Tatsache, dass die kubische Form Ψ durch $Ep'^2+2Fp'q'+Gq'^2$ teilbar ist, sodass das Resultat schliesslich die Form annimmt

$$(46)\qquad K_g\,ds - d\theta = P\,dp + Q\,dq,$$

31) Gauss, loc. cit. 24), S. 394—395.

32) O. Bonnet, *Mémoire sur la théorie générale des surfaces*, Journal de l'École Polytechnique Cahier 32 (1848), S. 131.

wo P, Q die folgenden Funktionen von p, q sind

$$P = \frac{EF_p - \frac{1}{2} EE_q - \frac{1}{2} FE_p}{E\sqrt{EG - F^2}}, \quad Q = \frac{\frac{1}{2} EG_p - \frac{1}{2} FE_q}{E\sqrt{EG - F^2}}.$$

In dieser Formel (46) ist aber in der Tat der Gausssche Satz über die Totalkrümmung, und zwar gleich in der Bonnetschen Verallgemeinerung enthalten. Denn für den speziellen Fall eines Systems von geodätischen Parallel- oder Polarkoordinaten, für das $ds^2 = dp^2 + m^2 dq^2$ ist, nimmt (46) die einfache Form an

$$d\theta - K_g\, ds = -\frac{\partial m}{\partial p}\, dq.$$

Integriert man diese Gleichung in positivem Sinn um die Begrenzung $\mathfrak{C}$ eines einfach zusammenhängenden Stückes σ der gegebenen Fläche herum, so erhält man den Satz von der Totalkrümmung in der Bonnetschen Verallgemeinerung

$$\int K\, d\sigma = \int_{\mathfrak{C}} d\theta - \int_{\mathfrak{C}} K_g\, ds, \tag{47}$$

unter K das Krümmungsmass der Fläche verstanden[33]. Es ist kaum anzunehmen, dass Gauss dieser naheliegende Zusammenhang entgangen sein sollte, und so darf man wohl annehmen, dass Gauss die Bonnetsche Verallgemeinerung seines Satzes bereits gekannt hat, wie dies auch schon R. v. Lilienthal[34] und P. Stäckel[35]) aus dem Umstand geschlossen haben, dass Gauss den Ausdruck $K_g\, ds$ als Differential df schreibt, und als »Differential der Seitenkrümmung« bezeichnet.

3. Die Landsbergsche Verallgemeinerung des Gauss-Bonnetschen Satzes.

18. Der Gauss-Bonnetsche Satz über die Totalkrümmung ist nun selbst wieder in einem allgemeineren Satz der Variationsrechnung enthalten, wie

---

33) Auch ohne Benutzung eines speziellen Koordinatensystems p, q erhält man direkt aus (46) durch den angegebenen Integrationsprozess die Gleichung (47), wenn man von dem bei L. Bianchi, *Vorlesungen über Differentialgeometrie* (2. Aufl. 1910), S. 67, Gleichung (17) gegebenen Ausdruck für das Krümmungsmass Gebrauch macht.

34) *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*, Bd. III, D 3, S. 134.

35) P. Stäckel, *Gauss als Geometer* (1918), Werke X 2, Abh. IV, Nr. 32, Materialien für eine wiss. Biogr. von Gauss, Heft V, S. 126.

zuerst LANDSBERG[36]) nachgewiesen hat. Freilich handelt es sich hier nicht um eine Ausdehnung des Satzes auf das allgemeine Integral

$$J = \int_{t_0}^{t_1} F(x, y, x', y')\, dt,$$

wie bei den früher betrachteten Verallgemeinerungen von Sätzen über geodätische Linien, vielmehr muss die Funktion F sehr starken Einschränkungen unterworfen werden. Bei der gesuchten Verallgemeinerung entspricht zunächst, wie bereits oben im Absatz 1, der geodätischen Krümmung die durch (43) definierte »extremale Krümmung«, dem Längenintegral s das Integral J und daher dem Differential ds der Integrand $F dt$, sodass an Stelle der Gleichung (44) die folgende tritt

$$K_e F dt = \sqrt{\frac{F_1}{F}}(x' dy' - y' dx') + \frac{(F_{xy'} - F_{yx'})\, dt}{F_1^{\frac{1}{2}} F^{\frac{1}{2}}}.$$

Die Verallgemeinerung des GAUSSschen Winkels θ wird dann eine Funktion $\theta(x, y, x', y')$ sein, deren Differential in seinen auf x', y' bezüglichen Gliedern mit dem ersten Glied des eben hingeschriebenen Ausdrucks übereinstimmt; d. h. θ muss den beiden Bedingungen genügen

$$\frac{\partial \theta}{\partial x'} = -y' \sqrt{\frac{F_1}{F}}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y'} = x' \sqrt{\frac{F_1}{F}}.$$

Da die Integrabilitätsbedingung erfüllt ist, so ist hierdurch θ bis auf eine additive, willkürlich bleibende Funktion von x, y bestimmt. Man erhält jetzt also als Verallgemeinerung der Gleichung (45)

$$K_e F dt - d\theta = S(x, y, x', y')\, dt, \tag{48}$$

wo

$$S(x, y, x', y') = \frac{F_{xy'} - F_{yx'}}{F_1^{\frac{1}{2}} F^{\frac{1}{2}}} - \frac{\partial \theta}{\partial x} x' - \frac{\partial \theta}{\partial y} y'.$$

Hier versagt nun aber der Versuch, die Analogie bei voller Allgemeinheit der Funktion F weiter zu treiben, da im allgemeinen die Funktion $S(x, y, x', y')$ nicht homogen und linear in x', y' ist, wie es bei dem speziellen Problem der geodätischen Linien der Fall war.

---

36) G. LANDSBERG, loc. cit. 29), S. 330—333. Vgl. dazu ferner P. FUNK und L. BERWALD, Lotos, Prag 67/68 (1920), S. 45.

In dem speziellen Fall jedoch, wo $S(x, y, x', y')$ homogen und linear in x', y' ist, gilt in der Tat eine Verallgemeinerung des Satzes (47), wie LANDSBERG im einzelnen nachweist. Integriert man nämlich die Gleichung (48) in positivem Sinn um die Begrenzung $\mathfrak{C}$ eines einfach zusammenhängenden Bereiches $\mathfrak{R}$ der x, y-Ebene, so ergibt sich

$$(49) \qquad \iint\limits_{\mathfrak{R}} (P_y - Q_x)\, dx\, dy = \int\limits_{\mathfrak{C}} d\Theta - \int\limits_{\mathfrak{C}} K_e F\, dt.$$

Die drei hier auftretenden Integrale sind, ebenso wie dies entsprechend in der Formel (47) der Fall war, absolute Invarianten der Funktion F in Bezug auf die Gesamtheit aller Punkttransformationen der x, y-Ebene und ihrer Erweiterungen. Ebenso ist das Krümmungsmass K eine absolute Invariante; dagegen ist die Differenz $P_y - Q_x$ keine absolute, sondern nur eine Invariante vom Index[37] 1. Wenn daher eine zweite Invariante $\mathfrak{J}$ von F vom Index 1 existiert, so lässt sich eine vollständige Analogie mit dem Fall der geodätischen Linien herstellen, indem man den Quotienten

$$(50) \qquad K = \frac{P_y - Q_x}{\mathfrak{J}},$$

der nunmehr ebenfalls eine absolute Invariante ist, als Verallgemeinerung des Krümmungsmasses und gleichzeitig das Produkt $\mathfrak{J}\, dx\, dy$ als Verallgemeinerung des Flächenelementes $d\sigma$ auffasst. Die Gleichung (49) erscheint dann in der Tat als eine naturgemässe Verallgemeinerung des GAUSS-BONNETschen Satzes (47).

---

37) Wegen der Terminologie vergleiche A. L. UNDERHILL, loc. cit. 30), S. 320.

III. Teil: Die Arbeit »Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungskräfte«[1]).

1. In der in der Überschrift genannten, im Jahr 1840 erschienenen Arbeit beweist GAUSS in Art. 29—34 ein fundamentales Existenztheorem der Potentialtheorie nach einer eigenartigen Methode, die für die Variationsrechnung nach verschiedenen Richtungen hin von Bedeutung ist. Es handelt sich um den Satz, dass die Dichtigkeit m einer stetigen Massenbelegung einer gegebenen Fläche s stets und nur auf eine Weise so gewählt werden kann, dass das Potential

$$V = \int \frac{m\,ds}{r}$$

derselben auf der Fläche einer vorgegebenen stetigen Funktion U der Koordinaten eines Punktes der Fläche gleich wird, wobei r den Abstand eines Punktes des Flächenelementes ds von dem angezogenen Punkt bedeutet und das Integral über die ganze Fläche zu erstrecken ist.

Zum Beweis dieses Satzes geht GAUSS von dem folgenden Variationsproblem aus: Unter allen stetigen und gleichartigen Verteilungen (d. h. solchen, für welche die Dichtigkeit m ihr Vorzeichen auf der Fläche nicht wechselt) einer gegebenen positiven Masse M, für die also

$$(1) \qquad m \geqq 0, \quad \int m\,ds = M,$$

diejenige zu bestimmen, für die das Integral

$$\Omega = \int (V - 2U)\,m\,ds,$$

erstreckt über die ganze Fläche s, seinen kleinsten Wert annimmt.

2. Es wird nun zunächst in Art. 30, 31 gezeigt, dass infolge der Voraussetzung $m \geqq 0$ der Wert des Integrals Ω für alle zulässigen Verteilungen eine positive untere Grenze besitzt. Daraus wird dann als selbstverständlich geschlossen, dass das Integral für mindestens eine dieser Verteilungen einen Minimumswert annehmen muss. Sodann werden mit Hilfe der Variations-

1) GAUSS' Werke, Bd. V, S. 197.

rechnung die Eigenschaften einer das Minimum liefernden Verteilung abgeleitet, und daraus wird schliesslich die Existenz einer diese Eigenschaften besitzenden Verteilung geschlossen.

Wir finden also bei GAUSS schon im Jahr 1840 dieselbe Schlussweise ausgebildet, die später von W. THOMSON[2]) (1847), DIRICHLET[3]) und RIEMANN[4]) (1851) zum Beweis verwandter Existenztheoreme benutzt worden ist, und die von RIEMANN als »DIRICHLETsches Prinzip«, von den Engländern als »THOMSONsches Prinzip« bezeichnet worden ist, aber richtiger den Namen »GAUSSsches Prinzip« führen würde, wie denn auch schon RIEMANN[3]) vermutet hat, dass DIRICHLET zu seinem Prinzip »durch einen ähnlichen Gedanken von GAUSS veranlasst worden ist«. Bekanntlich ist der Schluss von der Existenz einer unteren Grenze auf die Existenz eines Minimums nicht statthaft, und zwar ist ja merkwürdiger Weise GAUSS selbst der erste gewesen, der bei einer andern Gelegenheit Bedenken gegen diese Schlussweise ausgesprochen hat, nämlich in seiner Dissertation[4a]) bei der Kritik des D'ALEMBERTschen Existenzbeweises für die Wurzeln einer algebraischen Gleichung. WEIERSTRASS[5]) hat später (1870) diese Lücke im DIRICHLETschen Prinzip besonders nachdrücklich hervorgehoben und durch ein anschauliches Beispiel erläutert. Damit wird dem GAUSSschen und den übrigen angeführten Existenzbeweisen die Grundlage entzogen.

Ebenso bekannt ist, dass in neuerer Zeit HILBERT[6]) (1899) Methoden

2) *Sur une équation aux différences partielles qui se présente dans plusieurs questions de physique mathématique,* Journal de mathématique, Bd. 12 (1847), S. 496.

3) In Vorlesungen; RIEMANN sagt darüber im Jahre 1857: »DIRICHLET pflegt dieses Prinzip seit einer Reihe von Jahren in seinen Vorlesungen zu geben«, RIEMANNS Werke, 2. Aufl., 1892, S. 97.

4) RIEMANNS Werke, 1892, S. 30 und 97 ff.

4a) GAUSS' Werke, Bd. III, S. 10. Die betreffende Stelle lautet: »Ex suppositione, X obtinere posse valorem S neque vero valorem U, nondum sequitur, inter S et U necessario valorem T jacere, quem X attingere sed non superare possit. Superest adhuc alius casus: scilicet fieri posset, ut inter S et U limes situs sit, ad quem accedere quidem quam prope velis possit X, ipsum vero nihilominus numquam attingere«. Mit demselben Einwand beschäftigt sich auch der letzte Absatz von Art. 24 der Dissertation (a. a. O. S. 30) und ein Brief an SCHUMACHER vom 20. Juni 1840 (Werke, Bd. X 1, S. 108); vgl. die Anmerkung von L. SCHLESINGER, ebenda, S. 110 und A. FRÄNKEL, *Zahlbegriff und Algebra bei Gauss* (1920), Materialien für eine wiss. Biogr. von GAUSS, Heft VIII, S. 12.

5) K. WEIERSTRASS, *»Ueber das sogenannte Dirichletsche Prinzip«,* Werke, Bd. II, S. 49. Vgl. zur Geschichte des DIRICHLETschen Prinzips auch *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften,* II A 7 b, Nr. 17, 23—25.

6) D. HILBERT, *Über das Dirichletsche Prinzip,* Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung, Bd. 8 (1899), S. 184.

angegeben hat, diese Lücke wieder auszufüllen, indem er gezeigt hat, wie unter gewissen Voraussetzungen die Existenz einer Lösung eines Variationsproblems a priori bewiesen werden kann.

3. Um nun das eigentliche Variationsproblem zu lösen, ersetzt Gauss die als gefunden angenommene, das Minimum liefernde Massenverteilung m durch eine benachbarte $m+\mu$, wo μ eine auf der Fläche stetige Funktion ist, die wegen (1) den Bedingungen

$$m+\mu \geqq 0, \tag{2}$$

$$\int \mu\, ds = 0 \tag{3}$$

unterworfen ist. Die entsprechende erste Variation von V ist dann

$$\delta V = \int \frac{\mu\, ds}{r}.$$

Dieses Integral ist selbst wieder ein Potential, nämlich dasjenige der Massenverteilung μ auf der Fläche s, und daher gilt nach einem von Gauss in Art. 19 seiner Arbeit bewiesenen Satz der Potentialtheorie die Gleichung

$$\int \delta V . m\, ds = \int V \mu\, ds,$$

unter deren Berücksichtigung die erste Variation des Integrals Ω die Form annimmt

$$\delta\Omega = 2\int W \mu\, ds,$$

wenn zur Abkürzung: $W = V - U$ gesetzt wird. Für ein Minimum ist nun erforderlich, dass $\delta\Omega \geqq 0$ für alle dem absoluten Wert nach hinreichend kleinen stetigen Funktionen μ, die den beiden Bedingungen (2) und (3) genügen. Beschränken wir uns zunächst auf solche Teile der Fläche, in denen $m > 0$ ist, so kann μ sowohl positive wie negative Werte annehmen; daraus folgt, dass $W =$ Const. sein muss in allen Punkten der Fläche, in denen $m > 0$. Gauss leitet dieses Resultat durch folgende Überlegung her: Angenommen W wäre nicht konstant in den mit Masse belegten Teilen der Fläche. Dann sei A eine zwischen dem grössten und kleinsten Wert von W gelegene Konstante; alsdann lassen sich stets zwei mit Masse belegte Stücke p und q der Fläche von gleichem Flächeninhalt angeben, so dass $W - A > 0$ in p und $W - A < 0$ in q. Nun wähle man, unter ν eine positive Konstante verstanden, $\mu = -\nu$ in p, dagegen $\mu = \nu$ in q und $\mu = 0$ in allen übrigen Teilen

der Fläche: für diese Wahl von μ, die der Bedingung (3) genügt, würde dann $\delta\Omega < 0$ werden, da wegen (3) $\delta\Omega$ in der Form

$$\delta\Omega = 2\int (W - A)\,\mu\,ds \tag{4}$$

geschrieben werden kann.

Damit ist implizite zugleich das folgende allgemeine Lemma der Variationsrechnung bewiesen: Wenn die Funktion $N(x)$ stetig ist im Intervall $(x_0 x_1)$ und

$$\int_{x_0}^{x_1} N(x)\,\zeta(x)\,dx = 0$$

für alle Funktionen $\zeta(x)$, die in $(x_0 x_1)$ stetig sind und der Bedingung

$$\int_{x_0}^{x_1} \zeta(x)\,dx = 0$$

genügen, so ist stets $N(x) = \text{Const.}$ in $(x_0 x_1)$. Dieser Satz, ein Spezialfall des Fundamentallemmas für isoperimetrische Probleme, ist mit dem sogenannten du Bois-Reymondschen Lemma äquivalent; er ist auf anderem Wege von P. du Bois-Reymond[7] bei Gelegenheit seiner Modifikation des Beweises der Eulerschen Differentialgleichung bewiesen worden und später von Hilbert[8]) nach einer Methode, deren Grundgedanke mit dem des Gaussschen Beweises übereinstimmt.

Freilich ist gegen den Gaussschen Beweis einzuwenden, dass die von Gauss benutzte Funktion μ nicht stetig ist auf der Fläche. Der Beweis lässt sich aber leicht so abändern, dass auch der Stetigkeitsbedingung genügt wird. Man wähle die Flächenstücke p, q so wie oben, nur dass sie nicht notwendig von gleichem Flächeninhalt zu sein brauchen: dann setze man $\mu = -\varepsilon\varphi$ in p, wo ε eine kleine positive Konstante und φ auf der Begrenzung von p gleich Null, sonst aber in p positiv und stetig ist; ferner sei $\mu = \varepsilon'\psi$ in q, wo ε' und ψ für q entsprechend definiert sind wie ε und φ für p; überall sonst sei $\mu = 0$. Dann drücke man ε' mittels der Gleichung (3) durch ε aus. Die so

---

7) P. du Bois-Reymond, *Erläuterungen zu den Anfangsgründen der Variationsrechnung*, Mathematische Annalen, Bd. 15 (1879), S. 313.

8) In Vorlesungen, vgl. z. B. Bolza, *Vorlesungen über Variationsrechnung*, S. 28. Vgl. auch die Verallgemeinerung des Satzes von E. Zermelo, *Über die Herleitung der Differentialgleichung bei Variationsproblemen*, Mathematische Annalen, Bd 58 (1904), S. 558.

definierte Funktion μ genügt dann bei hinreichend kleinem ε allen Bedingungen und macht $\delta\Omega < 0$.

4. Nachdem so gezeigt ist, dass in den belegten Teilen der Fläche die Funktion W konstant sein muss, etwa

$$W = A, \tag{5}$$

bleiben noch die etwa vorhandenen unbelegten Teile der Fläche zu betrachten. In diesen Teilen kommt wegen (2) zu den bisherigen Bedingungen für μ noch die weitere hinzu, dass $\mu \geqq 0$ sein muss. Hieraus erhält GAUSS das Resultat, dass in den nicht belegten Teilen der Fläche

$$W \geqq A \tag{6}$$

sein muss. Den Beweis hierfür überlässt er dem Leser; ein solcher ergibt sich in der Tat auch ohne weiteres durch eine leichte Modifikation der früheren Schlussweise. Wäre nämlich in einem noch so kleinen nicht belegten Teil q der Fläche $W < A$, so sei p eines der sicher vorhandenen belegten Stücke; alsdann wähle man mit dieser neuen Bedeutung von p und q die Funktion μ genau so wie im vorigen Fall. Dann führt die Formel (4) zusammen mit der in den belegten Teilen geltenden Gleichung (5) zu einem negativen Wert von $\delta\Omega$, womit die Behauptung (6) bewiesen ist.

Für die Variationsrechnung ist gerade dieser zweite Teil des GAUSSschen Resultates besonders interessant, weil hier wohl das erste Beispiel eines Variationsproblems mit einer Ungleichung als Nebenbedingung vorliegt, eine Klasse von Aufgaben, die später von WEIERSTRASS[9] in seinen Vorlesungen behandelt worden ist.

WEIERSTRASS hat auch, und zwar aus der Betrachtung der ersten Variation, die Bedingungen abgeleitet, die an den Übergangsstellen, in denen das Gleichheitszeichen in das Ungleichheitszeichen übergeht, erfüllt sein müssen, und die zur Bestimmung dieser Stellen dienen. Man könnte versucht sein, durch ein dem WEIERSTRASSschen analoges Verfahren die Ausdehnung des nicht belegten Teiles der Fläche bestimmen zu wollen. Dass man aber auf diese Weise nicht zum Ziele kommen würde, geht a priori daraus hervor, dass aus den Be-

---

9) Vgl. KNESER, *Lehrbuch der Variationsrechnung*, § 44; BOLZA, *Vorlesungen über Variationsrechnung*, § 52 und HADAMARD, *Leçons sur le calcul des variations*, Nr. 161—164, 213 bis.

dingungen (5) und (6) auch umgekehrt folgt, dass $\delta\Omega \overline{\gtrless} 0$ für alle zulässigen Funktionen μ, sodass also aus der ersten Variation keine weiteren Folgerungen zu ziehen sind. Dagegen hat GAUSS für den speziellen Fall $U = 0$, der für seine weiteren Schlüsse besonders wichtig ist, mit Hilfe eines in einem vorangehenden Artikel (Art. 28) von ihm bewiesenen Satzes der Potentialtheorie gezeigt, dass hier bei der das Minimum liefernden Verteilung überhaupt keine unbelegten Stücke der Fläche vorkommen können, sodass also in diesem Fall die Gleichung $V = A$ in der ganzen Fläche ohne Ausnahme gilt.

5. Auf die sinnreichen Schlüsse, durch die GAUSS von diesen Resultaten aus zum Beweis des im Eingang genannten Existenztheorems der Potentialtheorie gelangt, wollen wir hier nicht eingehen, da sie nicht der Variationsrechnung, sondern ausschliesslich der Potentialtheorie angehören. Dagegen wollen wir noch auf eine Seite des GAUSSschen Variationsproblems hinweisen, die für die Variationsrechnung von besonderer Bedeutung ist: Die sonst in der Variationsrechnung behandelten Probleme pflegen auf Differentialgleichungen als erste notwendige Bedingung des Extremums zu führen. Hier haben wir es dagegen mit einem Variationsproblem zu tun, das auf eine Integralgleichung führt, nämlich auf die Gleichung (5), die ausgeschrieben lautet

$$\int \frac{m\,ds}{r} = U + A.$$

In der Tat lässt sich das GAUSSsche Variationsproblem keinem der üblichen Typen von Variationsproblemen unterordnen, sondern ist ein Beispiel eines eigenartigen neuen Typus[10]). Denkt man sich nämlich die Koordinaten eines Punktes der Fläche durch zwei unabhängige Parameter u, v ausgedrückt, die einen bestimmten Bereich $\mathfrak{A}$ überstreichen, so sieht man, dass das GAUSSsche Problem dem folgenden Typus angehört: Unter allen stetigen, nicht

10) Ein ähnliches Problem behandelt D. HILBERT in seinen *Grundzügen einer allgemeinen Theorie der linearen Differentialgleichungen* (Göttinger Nachrichten 1904, S. 78, 232, 257; 1906, S. 460; 1910, S. 9, 22), und zwar unter dem Namen GAUSS'sches Variationsproblem, nämlich die Aufgabe, das Integral

$$\int_a^b\int_a^b K(s,t)\,u(s)\,u(t)\,ds\,dt$$

zu einem Maximum zu machen mit der Nebenbedingung

$$\int_a^b (u(s))^2\,ds = 1.$$

negativen Funktionen $m(u, v)$, die einer isoperimetrischen Bedingung von der Form

$$\iint G(u, v)\, m(u, v)\, du\, dv = M$$

genügen, diejenige zu bestimmen, die ein vierfaches Integral von der Form

$$\Omega = \iiiint F(u, v;\, u', v')\, m(u, v)\, m(u', v')\, du\, dv\, du'\, dv'$$

zu einem Minimum macht, wobei der Integrationsbereich für u, v sowohl wie für u', v' derselbe Bereich $\mathfrak{A}$ ist. Auch für dieses allgemeinere Problem lässt sich das Gausssche Verfahren durchführen. Für die erste Variation erhält man

$$\delta\Omega = \iiiint F(u, v;\, u', v')\, [m(u', v')\, \mu(u, v) + m(u, v)\, \mu(u', v')]\, du\, dv\, du'\, dv'.$$

Durch Vertauschung der Bezeichnungen der beiden Reihen von Integrationsvariabeln und gleichzeitige Vertauschung der Integrationsordnungen im zweiten Summanden rechts, — was der Anwendung des Satzes von Art. 19 beim Gaussschen Problem entspricht —, lässt sich dieser Ausdruck auf die Form bringen

$$\delta\Omega = \iiiint K(u, v;\, u', v')\, m(u', v')\, \mu(u, v)\, du\, dv\, du'\, dv',$$

wenn man zur Abkürzung

$$F(u, v;\, u', v') + F(u', v';\, u, v) = K(u, v;\, u', v')$$

setzt.

Eine der Gaussschen Schlussweise ganz analoge Betrachtung führt dann auf folgende Integralgleichung erster Art als erste notwendige Bedingung des Minimums, wobei λ die isoperimetrische Konstante bedeutet,

$$\iint K(u, v;\, u', v')\, m(u', v')\, du'\, dv' = \lambda G(u, v),$$

die in denjenigen Teilen der Fläche erfüllt sein muss, wo $m > 0$, während das Gleichheitszeichen durch $\geqq$ zu ersetzen ist in denjenigen Teilen, wo $m = 0$.

6. Zusammenfassend können wir also sagen, dass in der Gaussschen Arbeit die folgenden Punkte für die Variationsrechnung von besonderer Wichtigkeit sind:

1) dass hier bereits die später mit dem Namen Dirichletsches Prinzip bezeichnete Schlussweise angewandt wird;

2) dass hier ein eigenartiger Typus von Variationsproblemen behandelt wird, der nicht auf eine Differentialgleichung, sondern auf eine Integralgleichung erster Art als erste notwendige Bedingung eines Extremums führt;

3) dass hier wohl zum ersten Mal ein Variationsproblem mit einer Ungleichung als Nebenbedingung vorkommt;

4) der Beweis des sogenannten du Bois-Reymondschen Lemmas.

Es scheint jedoch nicht, dass die Gausssche Arbeit, so nachhaltig auch ihr Einfluss auf die Entwicklung der Potentialtheorie gewesen ist, eine nennenswerte Wirkung auf die Variationsrechnung ausgeübt hat.

IV. Teil: Vereinzelte kürzere Anwendungen der Variationsrechnung.

1. Fragment: Über das Extremum des Integrals $\int n(x, y)\, ds$.

(Handbuch 21, S. 48. Werke, Bd. XI, 1.)

Gauss leitet in diesem Fragment die Eulersche Differentialgleichung für das ebene Variationsproblem

$$\int n(x, y)\, ds = \text{Min.}, \quad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

ab. Er betrachtet x als die unabhängige Variable, sodass das Integral lautet

$$\int n(x, y) \sqrt{1 + p^2}\, dx, \quad p = \frac{dy}{dx}.$$

Als Resultat erhält er nach Einführung des Tangentenwinkels φ die Differentialgleichung in der Form

$$\frac{\partial n}{\partial y} \cos \varphi - \frac{\partial n}{\partial x} \sin \varphi = n \frac{d\varphi}{ds}, \tag{1}$$

d. h. also

$$\frac{\partial n}{\partial y} \cos \varphi - \frac{\partial n}{\partial x} \sin \varphi = \frac{n}{r}, \tag{2}$$

wo $\frac{1}{r}$ die Krümmung bedeutet.

Eigentümlich ist bei der Ableitung einmal, dass Gauss nicht von der fertig vorliegenden Eulerschen Differentialgleichung für den allgemeinen Typus

$\int f(x, y, p)\, dx$ Gebrauch macht, sondern sie für den besonderen Fall durch Variation des Integrals und Anwendung der LAGRANGEschen partiellen Integration selbst ableitet, und andererseits die Einführung des Tangentenwinkels φ.

Auf die Differentialgleichung (2) wird man auch unmittelbar geführt, wenn man das Problem in Parameterdarstellung ansetzt und dafür die WEIERSTRASSsche Form der EULERschen Differentialgleichung hinschreibt.

Die Differentialgleichung (2) findet sich in etwas veränderter Form bei JELLETT[1]) wieder, der statt des Tangentenwinkels die Winkel der Kurvennormale mit den beiden Koordinatenachsen einführt. Das Resultat von JELLETT hat dann schliesslich W. THOMSON[2]) in die einfache Form setzt:

$$\frac{1}{r} = \frac{\partial \log n}{\partial \nu},$$

wo ν diejenige Richtung der Kurvennormale bedeutet, die aus der positiven Tangentenrichtung durch eine positive Drehung um $\frac{\pi}{2}$ hervorgeht.

Wie aus der Wahl des Buchstabens n hervorgeht, hat GAUSS ohne Zweifel die Anwendung des Problems auf die Bestimmung der Bahn des Lichtes in einem durchsichtigen Medium mit stetig veränderlichem Brechungsindex n im Auge gehabt.

2. Über die elastische Kurve.

(Einzelner Zettel, Werke, Bd. XI 1.)

DANIEL BERNOULLI hatte zuerst das Prinzip aufgestellt und EULER[3]) mitgeteilt, dass die elastische Kurve als Gleichgewichtslage einer elastischen Lamelle die potentielle Energie (»vis potentialis«) der Lamelle, d. h. das Integral

$$(3) \qquad \int \frac{ds}{\rho^2}$$

zu einem Minimum machen muss, wobei ρ den Krümmungsradius, ds das

1) *An elementary Treatise on the Calculus of Variations*, Dublin 1850, S. 140.

2) *Isoperimetrical Problems*, Nature 1894, S. 517; vgl. auch v. SCHRUTKA, *Die ökonomischste Trassenführung für den Fall, dass die Kosten für den laufenden Kilometer mit dem Orte wechseln*, Österreichische Wochenschrift für den öffentlichen Baudienst, Heft 37 (1911), S. 1—8.

3) EULER, *Methodus inveniendi etc*, Lausanne 1744, S. 246: »Cum DANIEL BERNOULLI mihi indicasset se universam vim, quae in lamina elastica incurvata insit, una quadam formula quam vim potentialem appellat, complecti posse; hancque expressionem in curva elastica minimam esse oportere; ...«.

Bogenelement der Kurve bedeutet. Hieran anknüpfend hatte dann EULER im Anhang zu seiner *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes* (S. 245—310) seine allgemeinen Methoden auf das Variationsproblem angewandt: Unter allen (ebenen) Kurven derselben Länge, die nicht nur durch zwei gegebene Punkte A und B hindurchgehen, sondern auch in diesen Punkten von gegebenen Geraden berührt werden, diejenige zu bestimmen, die das Integral (3) zu einem Minimum macht. In rechtwinkligen Koordinaten x, y mit x als unabhängiger Variabeln nimmt die Aufgabe die Form an: Das Integral

$$\int \frac{q^2\,dx}{(1+p^2)^{\frac{5}{2}}}, \quad p = \frac{dy}{dx}, \quad q = \frac{d^2y}{dx^2},$$

zu einem Minimum zu machen mit der isoperimetrischen Nebenbedingung

$$\int \sqrt{1+p^2}\,dx = S.$$

Da x und y nicht unter dem Integralzeichen vorkommen, so lassen sich zwei Integrale der EULERschen Differentialgleichung nach einer allgemeinen, von EULER herrührenden Bemerkung unmittelbar angeben; eine weitere Integration führt EULER auf die Gleichung

$$(4) \qquad \frac{2\sqrt{\alpha\sqrt{1+p^2}+\beta p+\gamma}}{(1+p^2)^{\frac{1}{4}}} = \beta x - \gamma y + \delta,$$

worin α die isoperimetrische Konstante, β, γ und δ Integrationskonstanten sind. Diese Gleichung vereinfacht er dadurch, dass er durch passende Wahl des Koordinatensystems γ und δ zum Verschwinden bringt. Die Auflösung der so vereinfachten Gleichung (4) nach p gibt dann das Resultat in der bekannten Form

$$dy = \frac{(x^2+b)\,dx}{\sqrt{a^4-(x^2+b)^2}}.$$

Hieraus leitet EULER die Gestalt der elastischen Kurve ab, wobei er im ganzen neun verschiedene Fälle unterscheidet. Lässt man die Grenzfälle bei Seite, so subsummieren sich alle unter zwei Hauptfälle, die elastische Kurve mit Wendepunkten und diejenige ohne Wendepunkte.

In dem vorliegenden Fragment gibt nun GAUSS eine Lösung desselben Variationsproblems, die an Eleganz wohl nicht zu übertreffen ist. Indem er

einerseits die Bogenlänge s als unabhängige Variable und andererseits den Tangentenwinkel φ als unbekannte Funktion einführt[1], gelingt es ihm, das Problem auf ein isoperimetrisches Problem vom einfachsten Typus mit zwei isoperimetrischen Bedingungen zurückzuführen, bei denen unter dem Integralzeichen nur eine unbekannte Funktion und ihre erste Ableitung vorkommen. Das gegebene Problem geht nämlich dadurch in die Aufgabe über, φ als Funktion von s so zu bestimmen, dass das Integral

$$\int_0^S \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 ds$$

ein Minimum wird mit den beiden isoperimetrischen Bedingungen

$$\int_0^S \cos\varphi\, ds = x_1 - x_0, \quad \int_0^S \sin\varphi\, ds = y_1 - y_0.$$

und der Anfangsbedingung:

$$\varphi(0) = \varphi_0, \quad \varphi(S) = \varphi_1,$$

wobei x_0, y_0 und x_1, y_1 die Koordinaten der gegebenen Punkte und φ_0 und φ_1 die gegebenen Anfangs-, bezw. Endrichtungen bedeuten. Hieraus folgt die Differentialgleichung

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} + A\cos\varphi + B\sin\varphi = 0,$$

wobei A und B die beiden isoperimetrischen Konstanten sind. Eine erste Integration liefert die Gleichung

$$\frac{1}{\rho} = -Ax - By - C,$$

in der durch passende Wahl des Koordinatensystems bewirkt werden kann, dass

$$A = 0, \quad C = 0, \quad B > 0.$$

Eine zweite Integration liefert dann die Gleichung

$$\cos\varphi = \frac{B}{2}y^2 + D, \tag{5}$$

---

[1]) Denselben Kunstgriff hat M. BORN in seiner Dissertation »*Untersuchungen über die Stabilität der elastischen Linie in Ebene und Raum*« (Göttingen 1906) S. 15, angewandt. Vgl. auch die Behandlung des Problems bei KNESER, *Lehrbuch der Variationsrechnung* (1900), S. 223—226.

die mit der in der oben angegebenen Weise vereinfachten EULERschen Gleichung (4) bei passendem Wechsel der Bezeichnung identisch wird.

Hier wäre nun eine Fallunterscheidung nötig gewesen, je nachdem die Integrationskonstante D, die stets $\gtreqless 1$ ist, grösser-gleich oder kleiner als -1 ist. Indem GAUSS $D = \cos 2\theta$ ansetzt, beschränkt er sich auf den ersten der beiden Fälle, den er dann auf elliptische Integrale zurückführt. Setzt man in den GAUSSschen Formeln

$$u = \frac{\pi}{2} - \psi, \quad \sin\theta = k,$$

so gehen sie in die übliche Darstellung der Elastica mit Wendepunkten über.

Für die Untersuchung des von GAUSS bei Seite gelassenen zweiten Falles $D < -1$ setze man in der Gleichung (5) $\frac{\varphi}{2} = \psi$, $\frac{2}{1-D} = k^2$; dann liefert ein dem von GAUSS für den ersten Fall angewandten analoges Verfahren die üblichen Formeln für die Elastica ohne Wendepunkte.

3. Über den homogenen Körper grösster Attraktion bei gegebener Masse.

(Handbuch 16, Bb, S. 107, Werke, Bd. XI 1.)

GAUSS gibt hier in gedrängter Kürze mit nur wenig Beweisandeutungen die Lösungen der folgenden vier Aufgaben:

1) Bestimmung des homogenen Körpers von gegebener Masse und grösster Anziehung auf einen gegebenen Punkt in gegebener Richtung unter Voraussetzung des NEWTONschen Anziehungsgesetzes;

2) Vergleichung der Anziehung dieses Körpers mit derjenigen einer Kugel von gleicher Masse;

3) Bestimmung des Sphäroids von gegebener Masse und grösster Anziehung auf einen seiner Pole;

4) Vergleichung der Anziehung dieses Sphäroids mit derjenigen einer Kugel von der gleichen Masse.

Am Schluss bemerkt GAUSS: »Eine ähnliche Untersuchung soll von Herrn PLAYFAIR im VI. Band der Transactions of the Royal Society of Edinburgh angestellt sein (1812)«. Diese Bemerkung stützt sich auf einen ganz kurzen Bericht über die Arbeit von J. PLAYFAIR in den Göttinger Gelehrten Anzeigen

für 1818, S, 860, aus dem wenig mehr zu ersehen war, als was der Titel der PLAYFAIRschen Arbeit, (die übrigens schon im Jahr 1807 vor der Gesellschaft gelesen worden war), besagte: *Of the Solids of Greatest Attraction, or those which, among all the Solids that have certain Properties, attract with the greatest Force in a given Direction.* GAUSS' Vermutung war richtig: PLAYFAIR beschäftigt sich in der Tat in der angegebenen Arbeit unter anderem mit den drei ersten der oben aufgeführten Aufgaben und löst sie, wie wir sehen werden, — mit einer Ausnahme — richtig. —

Die erste Aufgabe erledigt GAUSS durch die lakonische Bemerkung: »Man überzeugt sich leicht, dass jedes Teilchen an der Oberfläche des Körpers grösster Anziehung gleich starke Anziehung beitragen muss. Daher entsteht der Körper durch Umdrehung einer Kurve, deren Gleichung ist

$$\frac{\cos u}{rr} = A \qquad (6)$$

[5]«.

Dabei sind r, u Polarkoordinaten mit dem gegebenen Punkt als Pol und der gegebenen Richtung als Achse.

Gemeint ist hier ohne Zweifel dieselbe Überlegung, durch die bereits R. J. BOSCOVICH[6]) (1743) die Aufgabe zunächst unter Beschränkung auf Rotationskörper in etwas modifizierter Formulierung und unter Annahme einer beliebigen, nur von der Entfernung abhängigen Anziehungskraft gelöst hatte: Angenommen die Anziehungskomponente in der Richtung der Achse wäre in

---

5) Um Übereinstimmung mit den bei GAUSS weiter folgenden Formeln für die Masse und die Anziehung dieses Körpers herzustellen, müsste hier $\frac{1}{A^2}$ statt A geschrieben werden.

6) *Problema mecanicum de solido maximae attractionis,* Memorie sopra la fisica e istoria naturale di diversi valentuomini, T. I, Lucca 1743, S. 63—88 (auf der Landesbibliothek in Stuttgart vorhanden). Die Aufgabe war BOSCOVICH zwei Jahre vorher von DE MONTIGNI gestellt worden, und zwar in folgender Fassung: »Data quantitate materiae punctum attrahentis, in quacunque lege distantiarum invenire solidum ipsam continens, quod maxime omnium attrahat ipsum punctum positum in axe solidi producto ad datam distantiam ab ipsius solidi vertice propiore«. BOSCOVICH gibt an, dass er die im Text geschilderte »geometrische« Lösung ohne Mühe gefunden habe, dass ihm dagegen die Lösung derselben Aufgabe mittels Integralrechnung grosse Schwierigkeiten bereitet habe. Auch diese zweite »analytische« Lösung, die auf JAKOB BERNOULLIS Methode der Variation zweier benachbarter Ordinaten der Meridiankurve gegründet ist, zeichnet sich durch grosse Einfachheit und Eleganz aus und zeigt deutlich den inneren Zusammenhang zwischen der geometrischen und der analytischen Lösung. Am Schluss seiner Arbeit hebt BOSCOVICH als Vorzug der geometrischen Methode vor der analytischen hervor, dass die erstere auch auf den Fall anwendbar sei, wo die zur Vergleichung herangezogenen Körper nicht auf Rotationskörper beschränkt werden.

zwei Punkten der Oberfläche des Körpers grösster Anziehung verschieden, so schneide man aus dem Körper ein kleines Stück in der Umgebung des Punktes geringerer Anziehung heraus und lege es in der Umgebung des Punktes grösserer Anziehung von aussen an den Körper an, so würde man einen Körper gleicher Masse, aber grösserer Anziehung erhalten. Boscovich knüpft hieran zugleich einen Hinlänglichkeitsbeweis, indem er bemerkt, dass im Falle, wo die Anziehungskraft mit abnehmender Entfernung zunimmt, die Anziehung auf den gegebenen Punkt in der Richtung der Achse für Punkte im Innern des gefundenen Körpers grösser, für diejenigen ausserhalb kleiner ist als für Punkte auf der Oberfläche, woraus folgt, dass jede Veränderung des Körpers bei gleich bleibender Masse die Anziehung vermindert.

Für den speziellen Fall des Newtonschen Anziehungsgesetzes findet sich der erste Teil dieses Schlusses wieder bei Saint Jacques de Silvabelle[7]) (1745), die beiden Teile bei J. Playfair (1807), der zweite Teil bei K. H. Schellbach[8]) (1851). Alle diese Autoren, Gauss inbegriffen, scheinen unabhängig von einander auf diese Lösung des Problems ohne Variationskalkül gekommen zu sein.

Schliesslich hat neuerdings Spijker[9]) denselben Gedanken verwertet, um allgemeiner ohne Benutzung der Variationsrechnung zu beweisen, dass die Begrenzung desjenigen Körpers, der, als Integrationsbereich genommen, das Integral $\iiint F_1(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$ zu einem Extremum macht, während gleichzeitig das Integral $\iiint F_2(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$ einen gegebenen Wert haben soll, der Gleichung genügen muss

$$F_1(x, y, z) - k F_2(x, y, z) = 0,$$

wo k eine Konstante ist.

Nachdem die Meridiankurve des Körpers grösster Anziehung gefunden ist, bietet die zweite Aufgabe, die Berechnung des Verhältnisses der An-

7) *Problème: Supposant la loi d'attraction en raison inverse du carré de la distance, trouver la nature du solide de la plus grande attraction,* Mémoires de Mathématiques et de Physiques, presentés à l'Académie Royale des Sciences par divers Sçavans, Tome I, Paris 1750, S. XVII und 175/176. Die Arbeit ist datiert 7. Juli 1745.

8) *Probleme der Variationsrechnung,* Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 41 (1851), S. 343—345.

9) *Der Körper grösster Anziehung eines Ellipsoides,* Dissertation, Zürich 1904.

ziehung dieses Körpers auf den gegebenen Punkt zur Anziehung einer Kugel von gleicher Masse auf einen Punkt ihrer Oberfläche, keine Schwierigkeiten. GAUSS findet für das Verhältnis den Wert $3 : \sqrt[3]{25} = 1{,}025985$. Dasselbe Resultat gibt er auch in einer Fussnote zur Einleitung seiner *Principia generalia theoriae figurae fluidorum in statu aequilibrii*[10]) (1829), und zwar ausdrücklich als ein bekanntes Resultat, aber ohne Literaturnachweisung. Das bezieht sich ohne Zweifel darauf, dass PLAYFAIR[11]) in der oben zitierten Arbeit, die wohl inzwischen GAUSS zu Gesicht gekommen war, dasselbe Resultat abgeleitet hatte. Später ist derselbe Satz nochmals von SCHELLBACH[12]) bewiesen worden und ist dann in die Lehrbücher übergegangen[13]). —

Um die dritte Aufgabe zu lösen, die Bestimmung des Sphäroids von gegebener Masse und grösster Anziehung im Pol, bezeichnet GAUSS das Verhältnis der kleinen Achse des Sphäroids zur grossen Achse mit $\cos\varphi$ und berechnet dann das Verhältnis der Anziehung des Sphäroids im Pol zur Anziehung einer Kugel von gleicher Masse auf einen Punkt ihrer Oberfläche; er findet dafür den Wert

$$\frac{3\cos\varphi^{\frac{5}{3}}}{\sin\varphi^3}(\operatorname{tg}\varphi - \varphi). \tag{7}$$

»Dieser Ausdruck wird ein Maximum für

$$\varphi = \frac{9\operatorname{tg}\varphi + 2\operatorname{tg}\varphi^3}{9 + 5\operatorname{tg}\varphi^2}, \tag{8}$$

also für $\varphi = 43^0\,59'\,2''$.« Hieraus berechnet dann GAUSS noch das Verhältnis der beiden Anziehungen zu 1,02204 (vierte Aufgabe).

Mit derselben Aufgabe hatte sich auch bereits PLAYFAIR[14]) beschäftigt: Er führt ebenfalls den Winkel φ ein, berechnet dann die Anziehung des Sphäroids von der gegebenen Masse $\frac{4\pi n^3}{3}$ auf einen der Pole, die sich von dem GAUSSschen Ausdruck (7), wie a priori klar ist, nur um den konstanten Faktor $\frac{4\pi n}{3}$ unterscheidet, und wird so zu derselben Gleichung (8) für φ geführt wie

10) Werke, Bd. V, S. 31.

11) loc. cit., S. 198.

12) loc. cit. 8), S. 345.

13) MOIGNO-LINDELÖF, *Calcul des variations*, Paris 1861, S. 247.

14) loc. cit., S. 220—225.

GAUSS. Hier begnügt er sich nun aber, ohne zu untersuchen, ob die Gleichung noch weitere Wurzeln besitzt, mit der auf der Hand liegenden Lösung $\varphi = 0$, von der er, ohne auf eine Untersuchung der zweiten Ableitung einzugehen, behauptet, dass sie das Maximum liefert. So gelangt er im Gegensatz zu GAUSS zu dem Resultat, dass die Kugel unter allen Sphäroiden von gleicher Masse die grösste Anziehung auf einen Punkt im Pol ausübt.

Mit Rücksicht auf diesen Widerspruch mag hier eine Diskussion der Maximalaufgabe Platz finden. Führt man mit PLAYFAIR statt des Winkels φ die Grösse $t = \operatorname{tg}\varphi$ ein, so geht der Ausdruck für die Anziehung des Sphäroids von der Masse $\frac{4\pi n^3}{3}$ in einem seiner Pole über in

$$F(t) = \frac{4\pi n\,(1+t^2)^{\frac{2}{3}}\,(t - \operatorname{Arc\,tg} t)}{t^3}.$$

Für die Ableitung ergibt sich hieraus

$$F'(t) = \frac{4\pi n}{3}\,\frac{(9+5t^2)\operatorname{Arc\,tg} t - (9t+2t^3)}{t^4\,(1+t^2)^{\frac{1}{3}}}$$

und daraus als Bedingung für ein Extremum

$$f(t) \equiv \operatorname{Arc\,tg} t - \frac{9t+2t^3}{9+5t^2} = 0$$

in Übereinstimmung mit der Gleichung (8) von GAUSS und PLAYFAIR. Da nun

$$f'(t) = \frac{2t^4\,(3-5t^2)}{(1+t^2)\,(9+5t^2)^2},$$

so schliesst man, dass während t von 0 bis ∞ wächst, die Funktion $f(t)$ von 0 anfangend bis zu einem positiven, für $t = \sqrt{\frac{3}{5}}$ erreichten Maximalwert zunimmt und von da an bis $-\infty$ beständig abnimmt, also noch einmal verschwinden muss für einen Wert t_0, der etwas kleiner als 1 sein muss, da $f(1) = -0{,}0003$. Hieraus folgt dann, dass die Funktion $F(t)$ für $t = 0$ ein (relatives) Minimum, für $t = t_0$ das (absolute) Maximum besitzt, in Übereinstimmung mit GAUSS, während sich das Resultat von PLAYFAIR als unrichtig erweist.

Ganz analoge Formeln gelten für das verlängerte Rotationsellipsoid. Setzt man hier das Verhältnis der Polarachse zur Äquatorialachse gleich $\cosh\varphi$, so erhält man für die Anziehung des verlängerten Rotationsellipsoids von der

Masse $\frac{4\pi n^3}{3}$ im Pol den Ausdruck

$$F = \frac{4\pi n \cosh \varphi^{\frac{5}{3}} (\varphi - \tanh \varphi)}{\sinh \varphi^3},$$

aus dem bei ganz analoger Behandlung folgt, dass die Anziehung beständig abnimmt, während φ von 0 bis ∞ wächst, ein Resultat, das PLAYFAIR am Schluss seiner Untersuchung als Vermutung ausspricht.

SCHLUSSBEMERKUNG.

Bei der Abfassung des vorstehenden Aufsatzes habe ich mich in weitgehendem Masse der Unterstützung von F. KLEIN, A. KNESER, G. PRANGE, L. SCHLESINGER und P. STÄCKEL (†) zu erfreuen gehabt, die teils durch Mitlesen der Korrekturen, teils durch wertvolle Literaturnachweise und kritische Bemerkungen die Arbeit wesentlich gefördert haben. Allen diesen Herren sei auch an dieser Stelle mein herzlichster Dank ausgesprochen.

BOLZA.

Inhaltsangabe.

I. Teil: Die Principia generalia theoriae figurae fluidorum in statu aequilibrii.











